

Modeling and numerical simulation of quasi-one dimensional gas phase flow in a supersonic nozzle

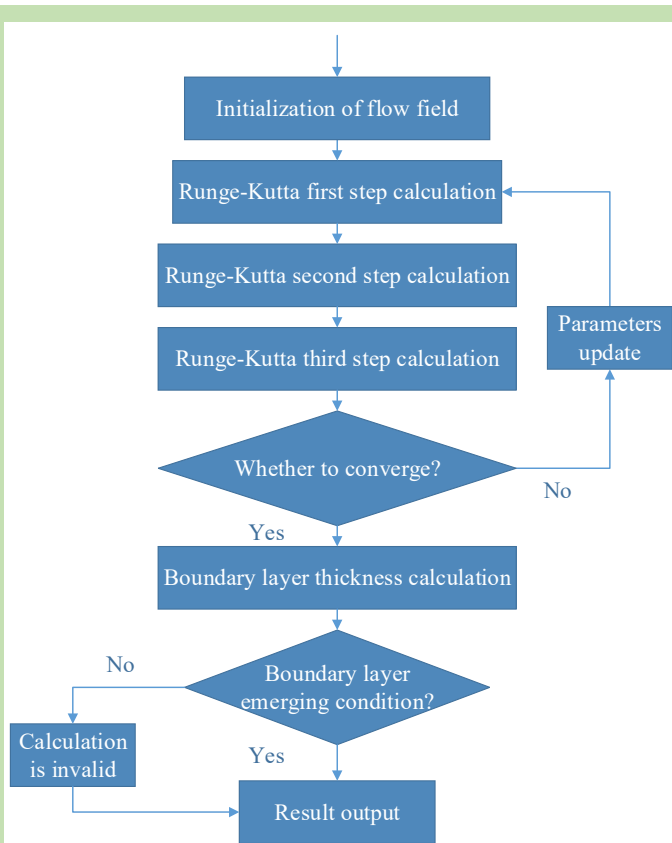
Lite ZHANG*, Qiuli YU, Bowen WU, Tiancheng LIU, Zilong FENG

School of Mechanical and Automatic Control, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou, Zhejiang 310018, China

Abstract: Mathematical modeling of the quasi-one dimensional gas phase flow in a nozzle, which accounted for wall friction and heat transfer, was established through theoretical analysis. Three flux vector splitting methods were used for the characteristic splitting of the aerodynamic equations. The variant form of them was discretized with a finite difference method. Specifically, the spatial and time derivatives were discretized with a fifth-order WENO scheme and a three-step third-order TVD Runge-Kutta method, respectively. The programming, calculations, validation and parameter study were performed based on the Fortran platform. The results showed that the numerical simulation agreed quite well with the experimental data if an appropriate friction correction factor was selected, which verified the availability of the established mathematical model and the adopted numerical methods and algorithms. It was found that as the half expansion angle of the nozzle was enlarged, both the gas velocity and the Mach number at the outlet increased, whereas the outlet static pressure decreased. The increase of the inlet total (or stagnation) temperature led to the significant increase of the outlet gas velocity and the decrease of the corresponding outlet Mach number due to the aggravation of wall friction and heat transfer. The increase of the inlet total (or stagnation) pressure cannot significantly increase the outlet gas velocity. The increase of the wall temperature led to the decrease of both the outlet gas velocity and the outlet Mach number.

The increase of the inlet total (or stagnation) temperature led to the significant increase of the outlet gas velocity and the decrease of the corresponding outlet Mach number due to the aggravation of wall friction and heat transfer. The increase of the inlet total (or stagnation) pressure cannot significantly increase the outlet gas velocity. The increase of the wall temperature led to the decrease of both the outlet gas velocity and the outlet Mach number.

Key words: supersonic nozzle; finite difference method; flux vector splitting; WENO scheme; TVD Runge-Kuta method



收稿: 2020-01-17, 修回: 2020-03-06, 网络发表: 2020-03-23, Received: 2020-01-17, Revised: 2020-03-06, Published online: 2020-03-23
基金项目: 浙江省自然科学基金一般项目(编号: LY17E060006); 浙江理工大学科研业务费专项资助项目(编号: 2019Q030); 国家重点研发计划“制造基础技术与关键部件”重点项目(编号: 2018YFB2004002)
作者简介: 章利特(1979-), 男, 浙江省平阳县人, 博士, 副教授, 动力工程与工程热物理专业, E-mail: langzichsh@zstu.edu.cn.

引用格式: 章利特, 余秋李, 吴博文, 等. 超音速喷管内准一维气相流动建模与数值模拟. 过程工程学报, 2020, 20(12): 1386-1396.
Zhang L T, Yu Q L, Wu B W, et al. Modeling and numerical simulation of quasi-one dimensional gas phase flow in a supersonic nozzle (in Chinese). Chin. J. Process Eng., 2020, 20(12): 1386-1396, DOI: 10.12034/j.issn.1009-606X.220026.

超音速喷管内准一维气相流动建模与数值模拟

章利特*, 余秋李, 吴博文, 刘天程, 冯子龙

浙江理工大学机械与自动控制学院, 浙江 杭州 310018

摘 要: 通过理论分析建立考虑壁面摩擦和换热影响的喷管内气相准一维流动数理模型, 在气动方程组矢通量分裂基础上, 采用有限差分方法对其变体形式进行离散, 空间导数采用五阶精度 WENO 格式, 时间导数采用三阶精度三步 TVD 龙格库塔方法, 在 Fortran 平台上进行编程和计算, 进行模型方法验证和参数研究。结果表明, 在适当选取摩擦修正因子时, 数值模拟与实验数据吻合较好, 验证了数理模型、数值计算与求解方法的有效性。喷管半扩张角增大时, 出口气流速度和马赫数增大, 而静压减小; 进口总温提高时, 出口速度显著升高, 但由于壁面摩擦和换热加剧, 相应的出口马赫数会减小; 进口总压提高时, 出口气流速度并不显著增大; 壁面温度升高时, 出口气流速度和马赫数均减小。

关键词: 超音速喷管; 有限差分法; 矢通量分裂; WENO 格式; TVD 龙格库塔方法

中图分类号: O241.82; TK124; TB126

文献标识码: A

文章编号: 1009-606X(2020)12-1386-11

1 前言

拉伐尔喷管可将通过的气体加速到超音速, 气体在截面积最小即喉部位置处恰好达到音速, 因而作为核心部件被广泛用于蒸汽轮机、超音速喷气发动机、超音速喷涂、无针注射、灭火器等装置, 拉伐尔喷管的设计将对装置性能产生决定性影响。

章利特等^[1]对喷管内气固两相流动进行分析, 得到气固两相流动参数与喷管渐扩段长度之间的关系。陈飞国等^[2]将粒化离散颗粒法和多相物质点法耦合建立了更通用、准确和有效的 EL 方法, 确定了最佳耦合参数。Behera 等^[3]和 Sardiwal 等^[4]研究了超音速喷管外形的设计方法, 特别对轴对称喷管的设计方法进行了分析, 提出了基于特征值法的两种设计方法。Jassim 等^[5]研究了超声速喷嘴内高压天然气的流动特性, 利用较精确的状态方程模型, 研究了实际气体效应, 并与理想气体情况进行了比较。Yu 等^[6]研究了喷嘴几何形状对不可压缩流体在雷诺数约 50000 时的湍流特性的影响, 通过与实验数据比较, 该模型对湍流波动的预测结果更准确, 在出口附近切槽或延长喷嘴对出口流动特性的影响不大。Lu 等^[7]建立了拉伐尔喷管两相压降预测的数学模型, 利用该模型讨论了影响拉伐尔喷管压降的主要因素, 考察了气体质量流量、固体载荷比、收敛角、喉道直径和喉道长度等因素的影响。Mahpeykar 等^[8]对一维收敛发散型超音速喷管中蒸汽流动的体积热进行了分析建模, 分析结果表明, 在收敛型超音速喷管的收敛段加入适当的体积热可降低过冷度, 从而显著降低成核率, 凝结减少了

不可逆的内部传热, 从而提高了蒸汽流动的效率。Zhang 等^[9]从理论和数值两方面研究了颗粒气体流动的堵塞现象和声速, 采用均质平衡模型对颗粒气体流的质量流率和声速进行了理论计算, 并与不同喷嘴压力比和颗粒质量载荷下的数值计算结果进行了比较, 粒子数密度和粒子浓度也被考虑在内。Akmandor 等^[10]使用平衡和非平衡模型研究了蒸汽液体通过收敛发散喷嘴的流动, 对混合声速进行了均匀计算, 分别在喉道堵塞和非堵塞条件下得到了混合料的质量流量和声速。Hwang 等^[11]对气体颗粒通过火箭喷嘴的流动进行了数学研究, 得到了粒子的马赫数和温度, 并对不同的粒子直径进行了研究。Chang 等^[12]应用通量矢量分裂方法计算单气体流量和通过喷气推进实验室(JPL)喷嘴的稀释标准气体流量, 验证了该方案对稀两相流模拟的准确性。

以上研究包含了喷管流动数理模型、数值计算与求解方法以及参数影响规律的重要结论, 对喷管设计具有显著价值, 对本工作也具有借鉴意义。鉴于超音速喷管在气固两相和多相流领域的诸多应用, 本工作构建了一套符合喷管气相超音速流动传热实际情形的简单数理模型, 为气固两相流建模奠定基础, 提供了精确高效的数值计算和求解方法, 在模型方法验证基础上, 开展喷管半扩张角、进口总温和总压等参数研究, 为超音速喷管的设计计算和操作运行提供一定指导。

2 几何模型

拉伐尔喷管剖面示意图如图 1 所示, 模拟对象为一矩形截面等厚度拉伐尔喷管, 通道前、后侧由两平行平

面围成, 喷管厚度为 $B=12\text{ mm}$, 渐缩段上、下侧为半径 $R_L=40\text{ mm}$ 的四分之一圆弧面, 喷管喉部为 $B\times B_{cr}=12\text{ mm}\times 12\text{ mm}$ 的正方形, 渐缩段和渐扩段长度分别为 $L_1=40\text{ mm}$ 和 $L_2=400\text{ mm}$, 喷管渐扩段半扩张角 δ 可变。

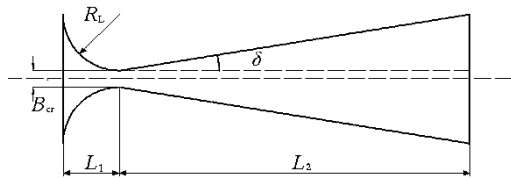


图1 拉伐尔喷管剖面示意图

Fig.1 Schematic diagram of Laval nozzle section

3 数理建模

3.1 流动传热模型

超音速喷管内的气相稳态流动可视为非定常流动在时间趋于无限时的渐近解, 鉴于非定常流动方程组的双曲型特点和在构造确保稳定性与收敛性差分格式方面的优势, 同时为使模型简单且能兼顾流动传热的实际情况, 将超音速喷管气相流动视为准一维非定常流动, 守恒形式方程组如下。

质量守恒方程:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) = -\rho v \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x} \quad (1)$$

动量守恒方程:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v^2 + p) = -\rho v^2 \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x} + f_{wf} \quad (2)$$

能量守恒方程:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e^*) + \frac{\partial}{\partial x} [(\rho e^* + p)v] = -\rho e^* v \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x} - p v \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x} + Q_w + G_w \quad (3)$$

式中, ρ 为气体物质密度(kg/m^3), v 为气流速度(m/s), p 为静态压强(Pa), e^* 为气体总能(J/kg), 均为截面平均气流参数, t 为时间(s), x 为喷管轴向位置(m), A 为喷管的截面积(m^2)。由于喷管内超音速流动的特点, 极易发展成湍流边界层, 为简化计算, 采用湍流平板边界层模型^[13], 利用喷管超音速流动实验数据对模型常数进行标定, 建立壁面摩擦和换热修正模型。对于湍流平板, 壁面摩擦力 $f_{wf}(\text{N}/\text{m}^2)$ 为

$$f_{wf} = -2C_f \rho \frac{v^2}{D} \quad (4)$$

式中, D 为当量湿周直径(m), C_f 为摩擦系数:

$$C_f = C_1 \left(\frac{h}{h_0} \right)^{C_2} \left(\frac{h_w}{h_0 Re_x} \right)^{C_3} \quad (5)$$

式中, $C_1=0.15$, $C_2=0.4$, $C_3=0.2$ 。壁面传热 $Q_w[\text{J}/(\text{m}^2\cdot\text{s})]$ 为

$$Q_w = -4 \frac{C_h}{D} (h_0 - h_w) \quad (6)$$

壁面摩擦做功 $G_w[\text{J}/(\text{m}^2\cdot\text{s})]$ 为

$$G_w = f_{wf} v \quad (7)$$

式中, 壁面换热系数 C_h 为

$$C_h = 0.53 C_f \quad (8)$$

静态焓 $h(\text{J}/\text{kg})$ 为

$$h = C_p T \quad (9)$$

气体总焓 $h_0(\text{J}/\text{kg})$ 为

$$h_0 = C_p T_0 \quad (10)$$

壁面焓 $h_w(\text{J}/\text{kg})$ 为

$$h_w = C_p T_w \quad (11)$$

式中, C_p 为气体定压比热容 [$\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$], 为温度的函数, 可依据气体热力学性质参数采用三次样条插值法确定, T 为气体静态温度(K), T_w 为壁面温度(K), T_0 为气体滞止温度(K)。雷诺数 Re_x 定义为

$$Re_x = \frac{\rho v x}{\mu} \quad (12)$$

式中, μ 为动力黏性系数($\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$), 采用 Sutherland 公式计算:

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{273.15} \right)^{1.5} \frac{273.15 + T_s}{T + T_s} \quad (13)$$

对于空气, 常数 $\mu_0=17.161\times 10^{-6}\text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$, $T_s=124\text{ K}$ 。

喷管相邻内壁面的边界层在拐角处会发生干涉, 造成边界层的相互“挤压”行为, 势必会改变原来平板边界层的局部速度分布, 从而略微改变壁面摩擦和换热。为能够考虑喷管内壁面与平板几何结构间的差异对壁面摩擦和换热的影响, 引入摩擦修正因子 s , 令 $C_f=0.15s$, 对模型常数 C_f 进行修正, 摩擦系数 C_f 和换热系数 C_h 也随之得到修正, 一旦 s 取值通过实验数据标定(5.1节)后, 就可获得适用于喷管超音速流动的壁面摩擦和换热修正模型。

3.2 边界层厚度模型

由于采用平板边界层模型, 不适用于喷管壁面边界层在轴线处发生交汇之后的流动传热行为, 需评估喷管壁面边界层的厚度。动量厚度 $\theta(\text{m})$ 、位移厚度 $\delta^*(\text{m})$ 和边

界层厚度 $\delta_0(\text{m})$ 满足如下关系:

$$\left(1 - \frac{2\delta^*}{D}\right)^2 = \frac{\rho v}{\rho_s v_s} \quad (14)$$

$$\frac{d\theta}{dx} + \theta \left[\frac{1}{\rho_s} \frac{d\rho_s}{dx} + \left(2 + \frac{\delta^*}{\theta}\right) \frac{1}{v_s} \frac{dv_s}{dx} + \frac{1}{D} \frac{dD}{dx} \right] = \frac{C_f}{2} \quad (15)$$

$$\delta_0 = \delta^* + 0.64\theta \quad (16)$$

喷管进口处满足 $\theta=0, \delta^*=0$ 。当不出现边界层在轴线处交汇情形时, 中心流参数不受边界层的影响, 满足等熵流关系。式(14)和(15)中, 下标 s 指喷管中心等熵流参数, 对于给定的喷管入口滞止压力 $p_{01}(\text{Pa})$ 和滞止温度 $T_{01}(\text{K})$, 当静压 p 已求解后, 中心流气体密度 ρ_s 和速度 v_s 由如下等熵流公式求解:

$$\rho_s = \frac{p_{01}}{RT_{01}} \left(\frac{p}{p_{01}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (17)$$

$$v_s = \left\{ \frac{2\gamma RT_{01}}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_{01}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

式中, R 为气体常数 $[\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})]$, 对于空气, $R=287.05$ 。

4 数值计算与求解方法

4.1 矢通量特征分裂

由于流动传热控制方程组的双曲型特点, 为了构造严格的迎风型差分格式, 首先将控制方程组改写为矢量形式, 并对其矢通量进行特征分裂。上述方程组的矢量形式如下:

$$\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} = \mathbf{S} \quad (19)$$

其中,

$$\mathbf{Z} = [\rho, \rho v, \rho e^*]^T \quad (20)$$

$$\mathbf{N} = [\rho v, \rho v^2 + p, (\rho e^* + p)v]^T \quad (21)$$

$$\mathbf{S} = [\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3]^T \quad (22)$$

$$\mathbf{S}_1 = -\rho v \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x} \quad (23)$$

$$\mathbf{S}_2 = -\rho v^2 \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x} + f_{wf} \quad (24)$$

$$\mathbf{S}_3 = -\rho e^* v \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x} - p v \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x} + Q_w + G_w \quad (25)$$

Steger 等^[14]提出了矢通量的分裂方法, 将方程中代表质量、动量和能量的矢通量 \mathbf{N} 按 Jacobian 系数矩阵

\mathbf{A}_m 的正、负特征值分裂成正、负两个矢通量 \mathbf{N}^\pm 。对于正矢通量 \mathbf{N}^+ 采用后差分格式计算, 对于负矢通量 \mathbf{N}^- 采用前差分格式计算。方程组(19)~(25)为矢通量 \mathbf{N} 的 Jacobian 矩阵:

$$\mathbf{A}_m = \frac{D(\mathbf{N})}{D(\mathbf{Z})} \quad (26)$$

其特征值 $\lambda_1=v, \lambda_2=v-a, \lambda_3=v+a$, 其中, a 为音速 (m/s) 。

傅德薰等^[15,16]介绍了简单分裂法、Steger-Warming 分裂法及 Van Leer 分裂法等三种分裂方法。本研究通过三种方法的应用对比, 发现修正后的 Steger-Warming 分裂法效果相对较好。为了克服在奇点附近数值振荡现象, 采用一小量 $\varepsilon=10^{-7}$ 对特征函数的分裂进行修正, 可保证熵增条件和解的唯一性满足。具体形式如下:

$$\lambda_i^\pm = \frac{\lambda_i \pm (\lambda_i + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}{2} \quad (27)$$

$$\mathbf{N}^\pm = \frac{\rho}{2\gamma} \begin{bmatrix} \lambda_1^\pm + \lambda_3^\pm + 2(\gamma-1)\lambda_2^\pm \\ \lambda_1^\pm(v-a) + \lambda_3^\pm(v+a) + 2(\gamma-1)\lambda_2^\pm v \\ \frac{1}{2}\lambda_1^\pm(v-a)^2 + \frac{1}{2}\lambda_3^\pm(v+a)^2 + (\gamma-1)\lambda_2^\pm v^2 + W \end{bmatrix} \quad (28)$$

其中,

$$W = \frac{(3-\gamma)(\lambda_1^\pm + \lambda_3^\pm)a^2}{2(\gamma-1)} \quad (29)$$

式中, γ 为气体绝热指数。

4.2 有限差分格式构造

4.2.1 空间导数差分离散

利用分裂后的矢通量构造气动方程组矢通量空间导数项的差分逼近式:

$$\frac{\partial \mathbf{N}_j}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{N}_j^+}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{N}_j^-}{\partial x} \approx \frac{\mathbf{DN}_j^+}{\Delta x} + \frac{\mathbf{DN}_j^-}{\Delta x} \quad (30)$$

式中, 下标 j 为网格编号, \mathbf{DN}^+ 为正通量, \mathbf{DN}^- 为负通量, Δx 为空间步长 (m) 。采用 Jiang 和 Shu 的五阶精度 WENO 格式^[17]构造。当特征值为正时, 对应于上标为“+”的情况, 矢通量导数逼近式的通量形式为

$$\frac{\mathbf{DN}_j}{\Delta x} = \frac{(\mathbf{H}_{j+1/2} - \mathbf{H}_{j-1/2})}{\Delta x} \quad (31)$$

正通量 $\mathbf{H}_{j+1/2}$ 采用三个通量加权平均:

$$\mathbf{H}_{j+1/2} = \omega_1 \mathbf{H}_{j+1/2}^{(1)} + \omega_2 \mathbf{H}_{j+1/2}^{(2)} + \omega_3 \mathbf{H}_{j+1/2}^{(3)} \quad (32)$$

式中, $\mathbf{H}_{j+1/2}^{(1)}, \mathbf{H}_{j+1/2}^{(2)}, \mathbf{H}_{j+1/2}^{(3)}$ 的具体表达式为

$$\mathbf{H}_{j+1/2}^{(1)} = \frac{1}{3} \mathbf{N}_{j-2} - \frac{7}{6} \mathbf{N}_{j-1} + \frac{11}{6} \mathbf{N}_j \quad (33)$$

$$H_{j+1/2}^{(2)} = -\frac{1}{6}N_{j-1} - \frac{5}{6}N_j + \frac{1}{3}N_{j+1} \quad (34)$$

$$H_{j+1/2}^{(3)} = \frac{1}{3}N_j + \frac{5}{6}N_{j+1} - \frac{5}{6}N_{j+2} \quad (35)$$

加权系数($k=1, 2, 3$):

$$\omega_k = \frac{\alpha_k}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \quad (36)$$

$$\alpha_k = \frac{b_k}{(\varepsilon_0 + IS_k)^{ps}} \quad (37)$$

式中, 加权因子 $b_1=1/10$, $b_2=6/10$, $b_3=3/10$, 小量 $\varepsilon_0=10^{-7}$, 指数“ ps ”取值为1, IS_k 为光滑度量因子, 具体表达式如下:

$$IS_1 = \frac{1}{4}(N_{j-2} - 4N_{j-1} + 3N_j)^2 + \frac{13}{12}(N_{j-2} - 2N_{j-1} + N_j)^2 \quad (38)$$

$$IS_2 = \frac{1}{4}(N_{j-1} - N_{j+1})^2 + \frac{13}{12}(N_{j-1} - 2N_j + N_{j+1})^2 \quad (39)$$

$$IS_3 = \frac{1}{4}(3N_j - 4N_{j+1} + N_{j+2})^2 + \frac{13}{12}(N_j - 2N_{j+1} + N_{j+2})^2 \quad (40)$$

式中涉及的通量 N 是矢通量 \mathbf{N} 的分量。当特征值为负时, 利用对称性, 将式(32)~(35), 式(38)~(40)中所有下标“ $j+m$ ”换成“ $j-m$ ”即可。

使用上述五阶 WENO 格式时, 靠近进、出口边界附近的节点需单独处理。为了确保差分格式具有三阶以上的精度, 利用三阶迎风和三阶紧致迎风格式联合构造。具体地, 利用三阶迎风格式:

$$DN_j^{3,+} = \frac{1}{3}N_{j+1}^+ + \frac{1}{2}N_j^+ - N_{j-1}^+ + \frac{1}{6}N_{j-2}^+ \quad (41)$$

$$DN_j^{3,-} = -\frac{1}{6}N_{j+2}^- + N_{j+1}^- - \frac{1}{2}N_j^- - \frac{1}{3}N_{j-1}^- \quad (42)$$

和三阶迎风紧致格式:

$$\frac{2}{3}DN_j^{3,+} + \frac{1}{3}DN_{j-1}^{3,+} = \frac{5}{6}(N_j^+ - N_{j-1}^+) + \frac{1}{6}(N_{j+1}^+ - N_j^+) \quad (43)$$

$$\frac{2}{3}DN_j^{3,-} + \frac{1}{3}DN_{j+1}^{3,-} = \frac{5}{6}(N_{j+1}^- - N_j^-) + \frac{1}{6}(N_j^- - N_{j-1}^-) \quad (44)$$

令式(41)中 $j=2$, 得:

$$DN_2^{3,+} = \frac{1}{3}N_3^+ + \frac{1}{2}N_2^+ - N_1^+ + \frac{1}{6}N_0^+ \quad (45)$$

令式(42)中 $j=2$, 得:

$$DN_2^{3,-} = -\frac{1}{6}N_4^- + N_3^- - \frac{1}{2}N_2^- - \frac{1}{3}N_1^- \quad (46)$$

令式(43)中 $j=2$, 并将 $DN_2^{3,+}$ 代入得:

$$DN_1^{3,+} = \frac{5}{2}(N_2^+ - N_1^+) + \frac{1}{6}(N_3^+ - N_2^+) - 2DN_2^{3,+} \quad (47)$$

令式(44)中 $j=1$, 并将 $DN_2^{3,-}$ 代入得:

$$DN_1^{3,-} = \frac{5}{4}(N_2^- - N_1^-) + \frac{1}{4}(N_1^- - N_0^-) - \frac{1}{2}DN_2^{3,-} \quad (48)$$

令式(43)中 $j=1$, 并将 $DN_1^{3,+}$ 代入得:

$$DN_0^{3,+} = \frac{5}{2}(N_1^+ - N_0^+) + \frac{1}{2}(N_2^+ - N_1^+) - 2DN_1^{3,+} \quad (49)$$

令式(44)和(42)中 $j=0$, 联立两式得:

$$DN_0^{3,-} = -2DN_1^{3,-} + \frac{1}{2}N_2^- + 2N_1^- - \frac{5}{2}N_0^- \quad (50)$$

以上为入口边界附近节点的通量差分构造, 同理可得到出口边界附件节点的通量差分 $DN_{j-2}^{3,\pm}$, $DN_{j-1}^{3,\pm}$, $DN_j^{3,\pm}$ 。

4.2.2 时间导数差分离散

空间导数离散化后的半离散方程为

$$\frac{\partial \mathbf{Z}_j}{\partial t} = \mathbf{R}_h(\mathbf{Z}_j) \quad (51)$$

$$\mathbf{R}_h(\mathbf{Z}_j) = \mathbf{N}_h(\mathbf{Z}_j) + \mathbf{L}_h(\mathbf{Z}_j) \quad (52)$$

式(52)中, $\mathbf{N}_h(\mathbf{Z}_j)$ 为方程中的非线性部分即对流项部分, $\mathbf{L}_h(\mathbf{Z}_j)$ 对应方程中的黏性项部分。

时间导数采用 Shu 等^[18]的具有三阶精度的三步 TVD 龙格库塔方法进行离散:

$$\mathbf{Z}^{(1)} = \mathbf{Z}^{(n)} + \Delta t \mathbf{R}_h(\mathbf{Z}^{(n)}) \quad (53)$$

$$\mathbf{Z}^{(2)} = \frac{3}{4}\mathbf{Z}^{(n)} + \frac{1}{4}\mathbf{Z}^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t \mathbf{R}_h(\mathbf{Z}^{(1)}) \quad (54)$$

$$\mathbf{Z}^{(n+1)} = \frac{1}{3}\mathbf{Z}^{(n)} + \frac{2}{3}\mathbf{Z}^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t \mathbf{R}_h(\mathbf{Z}^{(2)}) \quad (55)$$

式中, Δt 为时间步长(s), $\mathbf{Z}^{(i)}$ ($i=1, 2$)表示过渡时间层 t_1 和 t_2 上($t^n < t_1 < t_2 < t^{n+1}$)对应的量, 每一个时间层递进分三步实现。

4.3 流场初始化

众所周知, 利用非定常流场计算求解稳态流场时, 一个比较合理的初场对于加快计算收敛速度是非常有利的。因此, 假定喷管从等熵流动开始, 在壁面摩擦和换热效应下, 逐渐发展成实际的超音速流动。参数等熵关系式如下:

$$\frac{A}{A_{cr}} = \frac{1}{M} \left[\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2}} \left[\frac{\gamma+1}{2} \right]^{(\gamma-1)/2} \quad (56)$$

$$\frac{T_0}{T} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \quad (57)$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (58)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (59)$$

式中, 下标“cr”表示喉部位置。对式(56)利用切线法求

得气流马赫数 M , 将其代入式(57)~(59)中可求得喷管内整个等熵流场(即初始流场)中温度、压力和密度等参数。

4.4 入口边界处理

因为喷管入口为亚音速流动, 所以采用亚音速入口 c -特征线的相容性方程:

$$dp - \rho \alpha dv = \left[-a^2 \frac{\rho v}{A} \frac{\partial A}{\partial x} - a^2 K_1 + a K_2 + (\gamma - 1) K_3 \right] dt \quad (60)$$

式中, $K_1=0$, $K_2=f_{wf}$, $K_3=Q_w+G_w$ 。

全导数表达式:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \quad (61)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad (62)$$

沿着 c -特征线方程:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\lambda} = v - a \quad (63)$$

喷管入口静态参数与滞止参数关系:

$$\frac{\gamma}{(\gamma-1)} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{\gamma}{(\gamma-1)} \frac{p_{01}}{\rho_{01}} \quad (64)$$

$$\frac{p_1}{\rho_1^\gamma} = \frac{p_{01}}{\rho_{01}^\gamma} \quad (65)$$

式(64)和(65)中, 下标“1”, “01”分别表示喷管入口静态和滞止参数。可以先对式(64)求偏导, 得:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = -v_1 \rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} \quad (66)$$

再与式(61)~(63)一起代入式(60), 整理得到入口速度 v_1 的偏微分表达式:

$$(v_1 a_1 + \rho_1 a_1) \frac{\partial v_1}{\partial t} = (v_1 - a_1) \frac{\partial p_1}{\partial x} - \rho_1 a_1 (v_1 - a_1) \frac{\partial v_1}{\partial x} + a_1^2 \rho_1 u_1 \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} - a_1 K_2 - (\gamma - 1) K_3 \quad (67)$$

对式(67)中的空间导数 $\partial p_1 / \partial x$ 与 $\partial v_1 / \partial x$ 采用具有三阶精度的迎风差分格式离散:

$$DN_0 = \frac{1}{3} N_3 - \frac{3}{2} N_2 + 3 N_1 - \frac{11}{6} N_0 \quad (68)$$

此外, 空间偏导数 $\partial A / \partial x$ 可用解析法计算。时间积分依然采用 Shu 等^[18]的三阶三步龙格库塔方法计算。喷管入口气流速度通过这一约束条件, 不断地与整个流场参数一起进行计算更新, 最终得到收敛时的渐近稳态解。需要指出的是, 程序编写、调试和数值计算均在 Fortran 软件平台上进行。计算收敛标准为质量流量的残

差 $Er = \max \{ |q_m^{n+1} - q_m^n| / q_m^n \}$ 小于 10^{-9} 。当收敛条件满足后,

采用文献[19]的数值方法计算边界层厚度, 判断流场计算参数全部或者局部有效。

5 流动模型与数值方法验证

5.1 模型常数标定与准确性验证

采用文献[19]中的实验工况, 拉伐尔喷管进口总温 $T_{01}=300$ K, 壁面平均温度 $T_w=300$ K, 进口总压 $p_{01}=529$ kPa, 渐扩段半扩张角 $\delta_1=3.4368^\circ$, 在 0.25~2 的范围内逐渐改变摩擦修正因子 s 的取值, 可计算得到对应的流场参数, 包括 4 个实验测点位置 $x_1=180$ mm, $x_2=300$ mm, $x_3=310$ mm 和 $x_4=320$ mm 处的静压, 计算中空间步长取 1 mm, 时间步长取 5×10^{-7} s。定义测点压力相对误差平方和函数 $S_p = \sum [(p_{mi} - p_i) / p_{mi}]^2$ 表征相对误差的度量($i=1, 2, 3, 4$), 其中, p_{mi} 和 p_i 分别为第 i 测点处静压的实测值和计算值。图 2 为 S_p 随 s 的变化曲线, 可发现其为下凸曲线, 精确的极值点为 $s=1.05$, 此时有极值 $S_{p,\min}=0.00186$ 。取定 $s=1.05$, 即可标定出式(5)中的模型常数 $C_1=0.1575$, 后续计算不再变更。需要说明的是, 如果同时拥有若干截面上的静温和速度的逐点测量数据, 可以通过面积积分获得截面平均静温 T_{mj} 和速度 v_{mk} (下标 j 和 k 分别指静温和速度测量截面序号), 定义静温及速度相对误差平方和函数 $S_T = \sum [(T_{mj} - T_j) / T_{mj}]^2$ 和 $S_v = \sum [(v_{mk} - v_k) / v_{mk}]^2$, 进而定义综合参数相对误差平方和函数 $S = S_p + S_T + S_v$, 当其取到极值 $S_{l,\min}$ 时, 即可标定最佳的 s 值。

表 1 为拉伐尔喷管四个测点处静压计算值与实验测量值的对比, 按轴向 x 坐标从小到大的次序, 静压相对误差分别为 -3.96%, 0.37%, 0.74% 和 1.14%, 由此可见, 数值计算结果与实验测量数据之间的偏差很小, 从而验证了流动传热模型与数值方法的有效性。

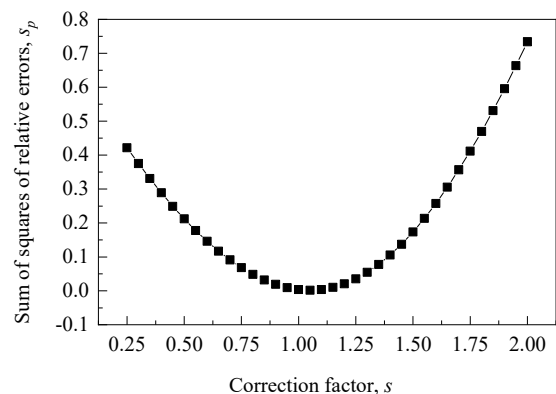


图 2 测点压力相对误差平方和随修正因子的变化
Fig.2 Variation of sum of squares of relative errors of the static pressures at the measuring points with correction factor

表1 拉伐尔喷管4个测点处静压计算值与实验值的比较
Table 1 Comparison of the calculated and measured static pressures at four measuring points in a Laval nozzle with the experimental values

Position of measuring points/mm	$x_1=180$	$x_2=300$	$x_3=310$	$x_4=320$
Calculated static pressure/kPa	46.783	30.074	29.314	28.606
Measured static pressure/kPa	48.714	29.963	29.098	28.284
Relative errors/%	-3.96	0.37	0.74	1.14

5.2 网格无关性验证

在相同实验工况下,保持时间步长为 5×10^{-7} s,改变空间网格步长分别为0.1、0.5和1.0 mm,对应的网格数为4400、880和440,计算了三套空间网格下拉伐尔喷

管内的流场。图3(a)和3(b)分别为不同空间网格步长时静压和雷诺数沿喷管轴线分布的比较,可以发现,所有静压和雷诺数曲线几乎完全重合,因此可认为当空间网格步长取为1.0 mm时,已经满足网格数量无关性要求,后续计算时不再变更。此外,由计算结果可知,在喷管喉部雷诺数 $Re_x = \rho vx/\mu$ 约为 3×10^6 ,而喷管出口处雷诺数更是超过了 9×10^6 ,依据文献[20],平板边界层发生湍流转捩的临界雷诺数范围 $Re_x = 3 \times 10^5 \sim 3 \times 10^6$,据此断定边界层喉部已基本完成湍流转捩,整个扩张段均为湍流壁面边界层,为采用平板湍流边界层修正模型的合理性提供了佐证。

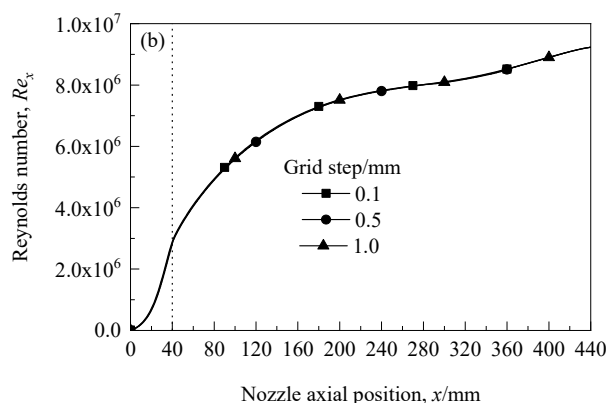
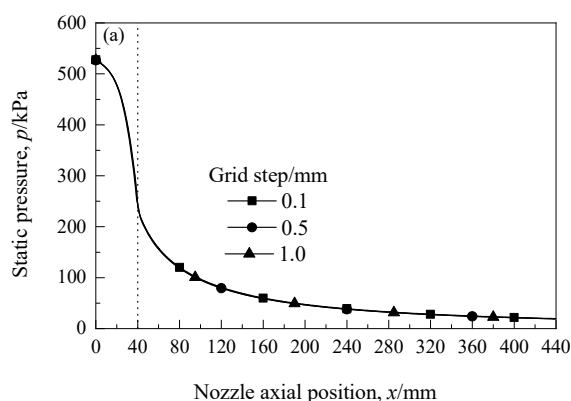


图3 不同空间网格步长下的静压和雷诺数的对比

Fig.3 Comparison of static pressures and Reynolds numbers at different grid step sizes

6 参数研究

通过单独改变拉伐尔喷管的扩张段半扩角、进口总温、进口总压及壁面平均温度等几何与热力学关键参数,计算了不同条件下喷管内气相流动参数沿喷管轴向的分布,考察了参数对流场的影响规律。

6.1 半扩张角的影响

图4(a)~4(d)分别为4种不同喷管渐扩段半扩张角 δ 条件下,静压 p 、气流速度 v 、马赫数 M 及边界层厚度 δ_b 沿轴向的分布,坐标 $x=40$ mm对应喉部位置。可以发现,静压沿轴向单调下降,气流速度和马赫数沿轴向先一直增大,而后缓慢减小,在渐缩段参数变化剧烈,在渐扩段趋于缓和。在渐缩段内,边界层厚度从入口由零较快增长,当达到略大于1 mm的最大值之后急剧减小,这是由渐缩段内的顺压梯度和截面积减小对边界层发展的严重抑制作用所导致,中心主流受边界层的影响很小,非常接近于等熵情形;而从喷管喉部开始至出口位置的渐扩段内边界层厚度呈近线性增长,但均未出现上、下两侧边界层交汇情形,流场计算全部有效。气流

速度和马赫数沿轴向可能出现的缓慢减小情形与等熵流中单调增大的情形不同,这是壁面摩擦引起气流动能的损耗,而壁面与气流间的换热及摩擦力做功改变了气流温度综合所致。此外,还可发现,当渐扩段半扩角改变时,喉部之前的各相同参数曲线几乎完全重合,可见半扩角改变对渐缩段流动几乎无影响,但自喉部起各相同参数曲线出现显著分离,对于较大的半扩角,在渐扩段的同一轴向位置处,静压较小,而气流速度、马赫数及边界层厚度较大,这主要是半扩角增大时横截面积增大更快,使气体膨胀更剧烈所致。

6.2 进口总温的影响

图5(a)~5(d)分别为4个不同喷管进口总温 T_{01} 下气流速度 v 、马赫数 M 、静温 T 及静压 p 沿轴向的分布,可以发现,进口总温较大时,在喷管同一位置处的气流速度较大,且随轴向距离增大差异更显著。对于较大的进口总温,同一位置处的马赫数却相对较小,在喷管收缩段,差异微小,难以从图上分辨,直到喉部之后,差异才逐渐显现,但依然很有限。进口总温提升,意味着气流进口总能增大,在气流进入喷管时可获得初始动能

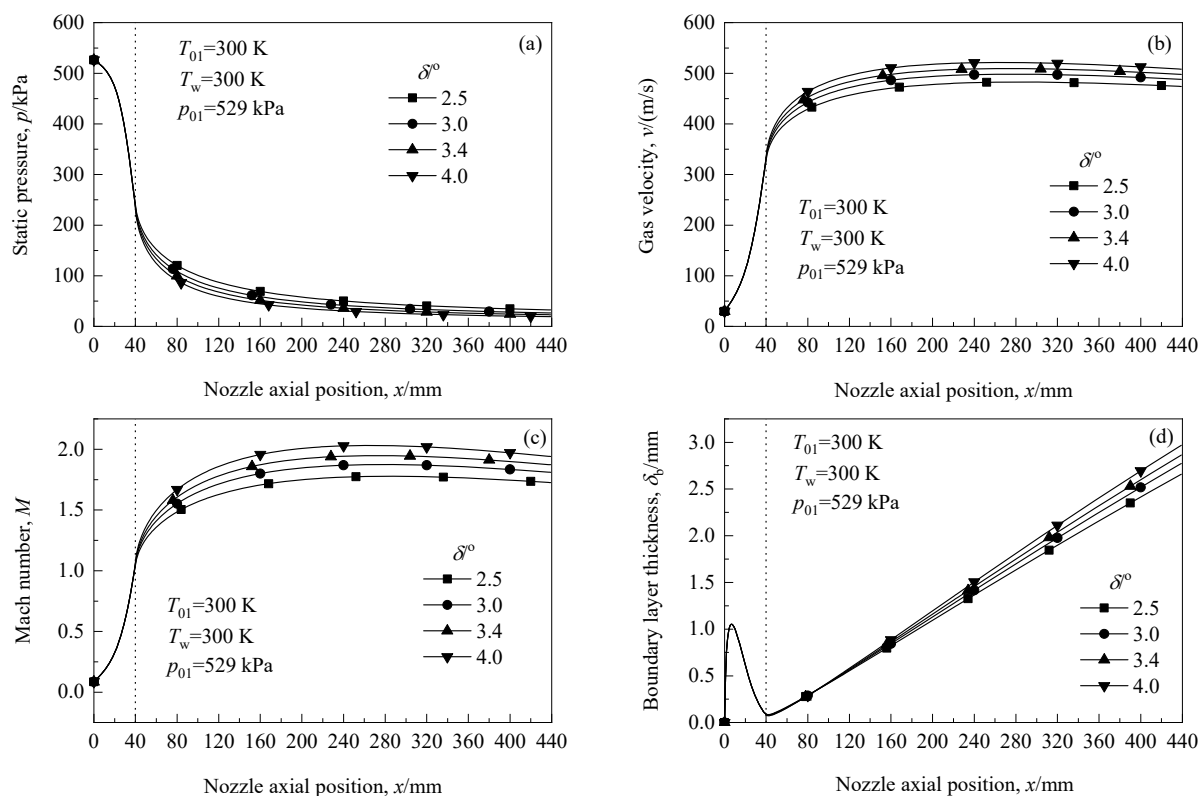


图 4 不同半扩角下的静压、气流速度、马赫数及边界层厚度的轴向分布

Fig.4 Axial distributions of static pressure, gas velocity, Mach number and boundary layer thickness at different half-divergence angles of nozzles

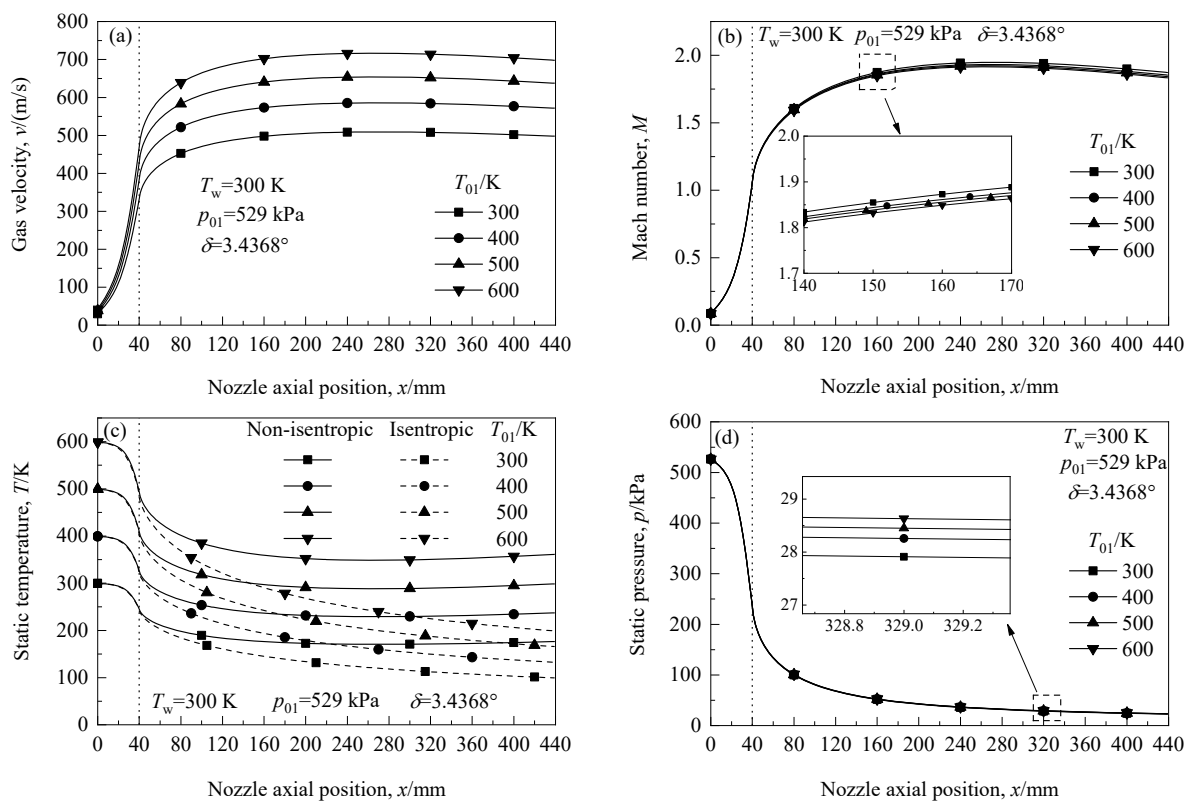


图 5 不同进口总温下的气流速度、马赫数、静温和静压的轴向分布

Fig.5 Axial distributions of gas velocity, Mach number, static temperature and static pressure at different inlet total temperatures

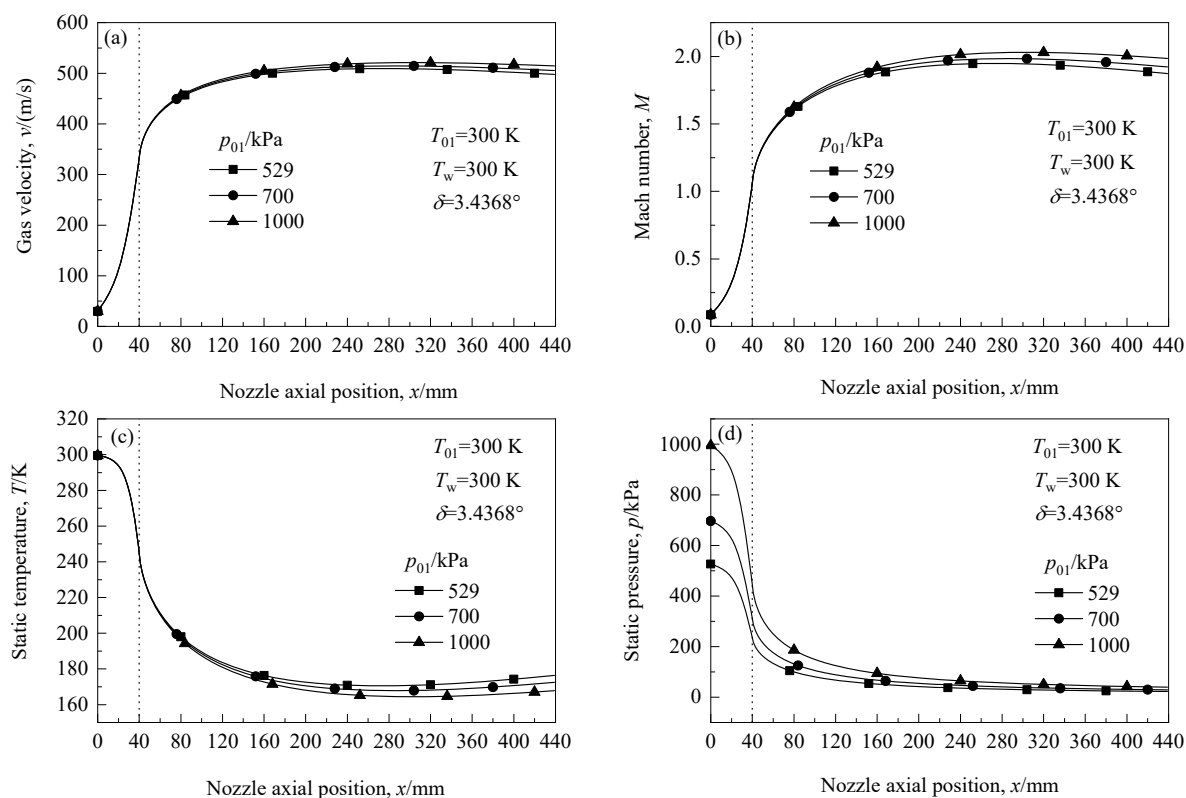


图6 不同进口总压下的气流速度、马赫数、静温和静压的轴向分布

Fig.6 Axial distributions of gas velocity, Mach number, static temperature and static pressure at different inlet total pressures

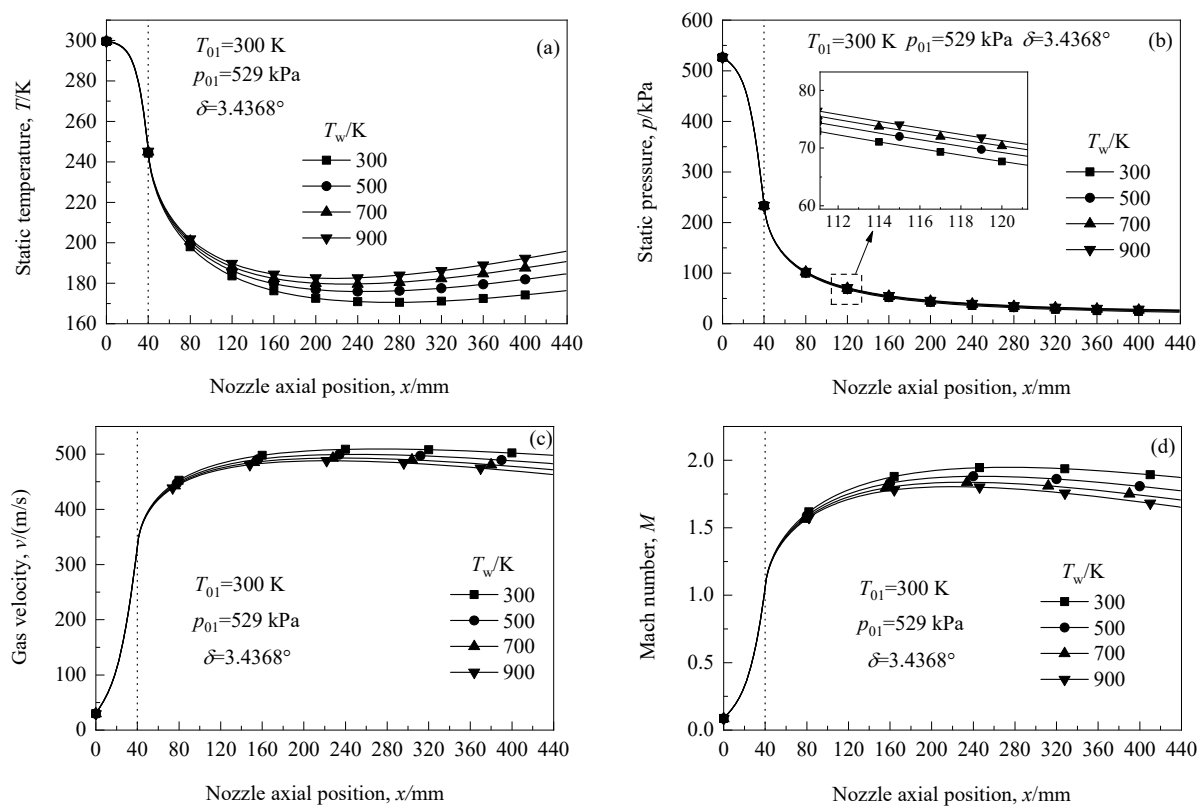


图7 不同壁面平均温度下的静温、静压、气流速度和马赫数的轴向分布

Fig.7 Axial distributions of static temperature, static pressure, gas velocity and Mach number at different average wall temperatures

和压能的提升, 后者表现为静压微小增大[图 5(d)], 这会通过压力梯度力的增大促进气流速度提升。进口总温提升同时也使气体保留了更多的内能, 壁面换热和摩擦力做功也会产生重要影响, 共同导致静温相对于等熵流获得一定程度的提升[图 5(c)], 当 $T_{01}=300\text{ K}$ 时, 等熵流喉部与出口静温分别为 250.00 和 99.44 K, 而实际流动喉部与出口静温分别提升到 251.01 和 176.38 K, 当 $T_{01}=600\text{ K}$ 时, 等熵流喉部与出口静温分别为 500.00 和 198.88 K, 而实际流动喉部与出口静温分别提升到 504.69 和 361.25 K, 所以气流当地音速也随之增大, 而且稍微超过了气流速度相对提升的程度, 综合效果即气流马赫数略微减小, 呈现上述进口总温对马赫数的影响规律。

6.3 进口总压的影响

图 6(a)~6(d)分别为 3 种不同喷管进口总压 p_{01} 条件下喷管内气流速度 v 、马赫数 M 、静温 T 和静压 p 的轴向分布。可以看出, 进口总压较大时, 从进口到喉部的渐缩段内任一位置处的气流速度和马赫数与总压较小时几乎完全一致, 而从喉部到出口的渐扩段内同一位置处的气流速度和马赫数较大, 且随轴向距离增大差异更明显, 但效果并不显著。进口总压增大, 压能增大, 导致静压全程提升[图 6(d)]及压力梯度力的增大。由于拉伐尔喷管在渐缩段内边界层发展被严重抑制, 内部流动非常接近于等熵流情形, 所以进口总压增大对气流速度和静温几乎无任何影响。但进入渐扩段后, 边界层开始发展, 较大的压力梯度力使气流克服壁面摩擦阻力和抑制边界层发展的能力更强, 所以在膨胀过程中获得更多的动能和速度, 由于静温几乎不受进口总压影响, 所以气流马赫数受进口总压增大的影响情形与气流速度的非常接近。

6.4 壁面温度的影响

图 7(a)~7(d)分别为 4 个壁面平均温度 T_w 条件下喷管内静温 T 、静压 p 、气流速度 v 和马赫数 M 的轴向分布。可以看出, 壁面平均温度 T_w 升高时, 从进口到喉部的渐缩段内任一位置处的静温、静压、气流速度和马赫数曲线几乎完全重合, 而从喉部到出口的渐扩段内同一位置处的静温和静压增大而气流速度和马赫数减小, 且沿轴向距离增大, 差异更显著。喷管渐缩段内气流非常接近于等熵流动, 壁面平均温度升高引起的壁面换热量增大微乎其微, 对静温、静压、气流速度及马赫数的影响极小。但进入渐扩段后, 气体静温已显著下降, 壁面向气体的传热对气体内能的提升逐渐变得重要, 壁面平均温度的提升势必导致气体内能、静温和当地音速增大, 同时也导致了静压升高, 从而使轴向压力梯度力减

小, 抑制了气体的膨胀加速, 所以气流速度反而减小, 气流马赫数也随之减小。

7 结 论

从湍流平板边界层模型出发, 引入摩擦修正因子, 用实验数据对其进行标定, 构建了超音速喷管内气相准一维流动模型, 结合矢量通量特征分裂、五阶 WENO 格式空间导数离散、邻近进出口节点三阶迎风处理、进口气流速度约束条件引入、三步三阶 Runge-Kutta 时间积分及等熵流场初始化等手段, 形成一套较精确高效的流场数值计算方法。在此基础上, 开展了较系统地参数研究, 得到以下结论:

- (1) 渐扩段半扩角增大时, 气流速度和马赫数沿轴向上升得更快, 静压下降得更快。
- (2) 进口总温上升时, 气流速度上升更快, 静温下降更慢, 马赫数上升稍慢。
- (3) 进口总压增大时, 气流速度和马赫数都上升较快, 但不同进口总压下差别不显著。
- (4) 壁面温度上升时, 气流静温和静压下降较慢, 气流速度和马赫数上升较慢。

参考文献

- [1] 章利特, 徐廷相. 缩放喷管内的气固两相流动和缩放喷管长度的研究 [J]. 西安交通大学学报, 2004, 38(7): 702-704.
Zhang L T, Xu T X. Study on the gas-solid two-phase flow and the length of the nozzle [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2004, 38(7): 702-704.
- [2] 陈飞国, 葛蔚. 耦合粗粒化离散颗粒法和多相物质点法的气固两相流模拟 [J]. 过程工程学报, 2019, 19(4): 651-660.
Chen F G, Ge W. Gas-solid two-phase flow simulation based on coupled coarse-grained discrete particle method and multi-phase material point method [J]. The Chinese Journal of Process Engineering, 2019, 19(4): 651-660.
- [3] Behera B, Srinivasan K. Design methods for axisymmetric supersonic nozzle contours [J]. International Journal of Turbo and Jet Engines, 2007, 24(2): 115-118.
- [4] Sardiwal S K, Chowdary D H, Artham S, et al. Numerical solution for the design of a ducted axisymmetric nozzle using method of characteristics [J]. International Journal of Research in Engineering and Science (IJRES), 2015, 3(5): 74-80.
- [5] Jassim E, Abdi M A, Muzychka Y. Computational fluid dynamics study for flow of natural gas through high-pressure supersonic nozzles: part 1. real gas effects and shockwave [J]. Petroleum Science and Technology, 2008, 26(15): 1757-1772.
- [6] Yu Y, Shademan M, Barron R M, et al. CFD study of effects of geometry variations on flow in a nozzle [J]. Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics, 2012, 6(3): 412-425.
- [7] Lu H, Guo X, Huang W, et al. Flow characteristics and pressure drop across the Laval nozzle in dense phase pneumatic conveying of the pulverized coal [J]. Chemical Engineering and Processing: Process

- Intensification, 2011, 50(7): 702–708.
- [8] Mahpeykar M R, Teymourash A R, Amiri Rad E. Reducing entropy generation by volumetric heat transfer in a supersonic two-phase steam flow in a Laval nozzle [J]. *International Journal of Exergy*, 2011, 9(1): 21–39.
- [9] Zhang G, Kim H D. Theoretical and numerical analysis on choked multiphase flows of gas and solid particle through a convergent-divergent nozzle [J]. *The Journal of Computational Multiphase Flows*, 2018, 10(1): 19–32.
- [10] Akmandor I S, Nagashima T. Predictions for cryogenic homogeneous two-phase flows in a choked Laval nozzle [J]. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 1999, 13(3): 355–363.
- [11] Hwang C J, Chang G C. Numerical study of gas-particle flow in a solid rocket nozzle [J]. *AIAA Journal*, 1988, 26(6): 682–689.
- [12] Chang H T, Hourng L W, Chien L C, et al. Application of flux-vector-splitting scheme to a dilute gas-particle JPL nozzle flow [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1996, 22(10): 921–935.
- [13] Fewell K P, Kessel P A. Analysis, design, and testing of components of a combined ablation/erosion nozzle [R]. Arnold AFB TN: Arnold Engineering Development Center, 1976: 7–54.
- [14] Steger J L, Warming R F. Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite-difference methods [J]. *Journal of Computational Physics*, 1981, 40(2): 263–293.
- [15] 傅德薰, 马延文, 黄兰洁, 等. 流体力学数值模拟 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1993: 122–147.
- Fu D X, Ma Y W, Huang L J, et al. Numerical simulation of fluid mechanics [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1993: 122–147.
- [16] 傅德薰, 马延文, 李新亮, 等. 可压缩湍流直接数值模拟 [M]. 北京: 科学出版社, 2010: 63–69.
- Fu D X, Ma Y W, Li X L, et al. Direct numerical simulation of compressible turbulence [M]. Beijing: Science Press, 2010: 63–69.
- [17] Jiang G S, Shu C W. Efficient implementation of weighted ENO schemes [J]. *Journal of Computational Physics*, 1996, 126(1): 202–228.
- [18] Shu C W, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes [J]. *Journal of Computational Physics*, 1988, 77(2): 439–471.
- [19] 章利特. 基于斜冲波理论的气固两相分离技术及应用 [D]. 西安: 西安交通大学, 2006: 21–32.
- Zhang L T. Technology and application of separation of gas and solid two phases based on oblique shock wave theory [D]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University, 2006: 21–32.
- [20] 吴望一. 流体力学(下册) [M]. 北京: 北京大学出版社, 1983: 370–381.
- Wu W Y. Fluid mechanics (volume two) [M]. Beijing: Peking University Press, 1983: 370–381.