

# A correlation model of drag coefficient for bubbles/droplets in a wide Reynolds number range

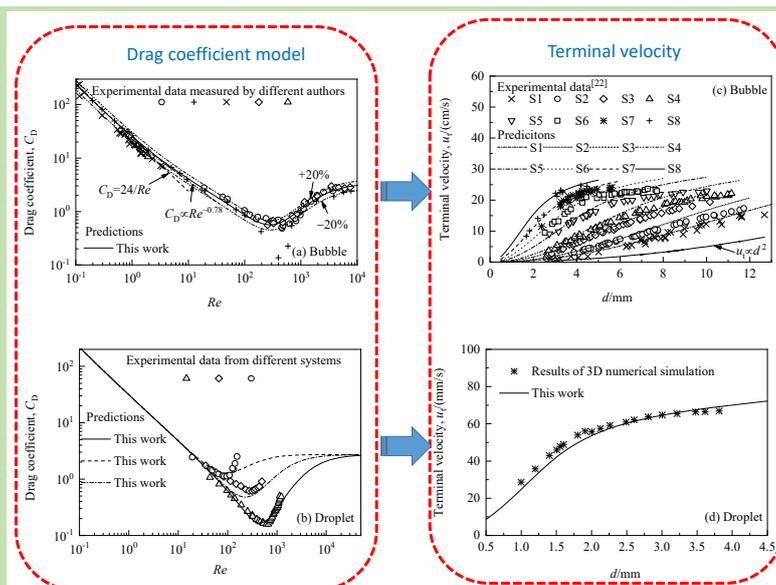
Shenggao GONG<sup>1\*</sup>, Ningning GAO<sup>1\*</sup>, Lelin ZENG<sup>2</sup>, Anwu LI<sup>1</sup>, Xiaoyu LIU<sup>1</sup>,  
Qing TANG<sup>1</sup>, Laibing LI<sup>1</sup>

1. School of Materials and Chemical Engineering, Hunan Institute of Technology, Hengyang, Hunan 421002, China  
2. School of Chemistry and Chemical Engineering, Hunan Institute of Science and Technology, Yueyang, Hunan 414006, China

**Abstract:** It is of great significance to predict the drag coefficient  $C_D$  and the rising velocity of fluid particles (i.e. bubbles or droplets) accurately because they are helpful to estimate the phase holdup distribution, liquid phase velocity distribution, fluid particle residual time and mass transfer rate in the reactor. However, most of the correlations in the literature to estimate  $C_D$  are piecewise, only valid in the low Reynolds number ( $Re$ ) range and difficult to be extended to different experimental systems. In the view of these shortcomings, based on the experimental and theoretical results, this work proposed a new mathematical correlation model which can

describe  $C_D$  evolution observed by experiments in a wide  $Re$  range, and compiled a program to solve the multi-dimensional unconstrained linear optimization problem to determine the model parameters. The new fluid particle  $C_D$  correlation showed a good prediction ability and reasonably predicted the fluid particle  $C_D$  value measured by different researchers under different experimental systems (e.g. air–water, air–glycerol, air–glycerol–water, n-butanol–water, n-octanol–water, toluene–water etc.) and different operating conditions (e.g. bubble:  $0.1 < Re < 10^4$ ,  $10^{-11} < Mo < 7$ ; droplet:  $5 < Re < 2000$ ,  $10^{-11} < Mo < 10^{-6}$ ). In addition, the rising velocities of fluid particles were predicted by combining the new fluid particle  $C_D$  correlation and single fluid particle motion equation. The predicted terminal velocity and rising velocity of fluid particles also were consistent with the results of different experimental systems. The above predictions presented that the new  $C_D$  correlation model was universal, reasonable and reliable to some extent.

**Key words:** drag coefficient; mathematical model; rising velocity; droplet; bubble



收稿: 2020-05-29, 修回: 2020-07-01, 网络发表: 2020-08-12, Received: 2020-05-29, Revised: 2020-07-01, Published online: 2020-08-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(编号: 21706059); 湖南省自然科学基金项目(编号: 2017JJ2063; 2020JJ5116); 湖南省教育厅项目(编号: 19C0536; 16A053); 湖南工学院博士启动基金(编号: HQ17010; 2017HQ019); 湖南省材料科学与工程特色应用学科资助项目(编号: 湖南省教育厅[2018]469号); 锰酸锂用电解二氧化锰绿色生产与应用湖南省工程研究中心资助项目(编号: 湘发改委高技[2019]853号); 湖南工学院大学生创新训练项目(编号: CX2019070)

作者简介: 龚升高(1988-), 男, 湖南省益阳市人, 博士研究生, 讲师, 化学工程与技术专业, E-mail: gongshenggao0827@163.com; 通讯联系人, 龚升高; 高宁宁, E-mail: gaoyezhi@163.com.

**引用格式:** 龚升高, 高宁宁, 曾乐林, 等. 宽  $Re$  范围内气泡和液滴曳力系数的关联模型. 过程工程学报, 2021, 21(6): 649-657.

Gong S G, Gao N N, Zeng L L, et al. A correlation model of drag coefficient for bubbles/droplets in a wide Reynolds number range (in Chinese). Chin. J. Process Eng., 2021, 21(6): 649-657, DOI: 10.12034/j.issn.1009-606X.220166.

# 宽 $Re$ 范围内气泡和液滴曳力系数的关联模型

龚升高<sup>1\*</sup>, 高宁宁<sup>1\*</sup>, 曾乐林<sup>2</sup>, 李安伍<sup>1</sup>, 刘孝玉<sup>1</sup>, 唐清<sup>1</sup>, 李来丙<sup>1</sup>

1. 湖南工学院材料与化学工程学院, 湖南 衡阳 421002

2. 湖南理工学院化学化工学院, 湖南 岳阳 414006

**摘要:** 流粒(气泡或液滴)的曳力系数  $C_D$  和上升/终端速度因有助于准确预测反应器内相含率分布、液相速度分布、流粒停留时间和传质速率而具有重要意义。但现有用于估算流粒  $C_D$  的关联式大多分段且只在低雷诺数  $Re$  区间内有效, 并难以同时准确预测不同实验体系和操作条件下的实验结果。针对这些不足, 基于实验测量和理论分析, 本工作提出了一个能够在整个  $Re$  范围内合理描述实验观测到的流粒  $C_D$  演变规律的新数学关联式, 并利用单组实验数据和编写的求解多维无约束线性优化问题的计算机程序确定了模型参数, 且将新流粒  $C_D$  关联式与现有经验模型、实验结果或三维数值模拟结果进行了对比。结果表明, 新流粒  $C_D$  关联式展现出优异的预测能力, 能对不同实验体系(空气-水、空气-甘油-水、空气-甘油、甲苯-水、正丁醇-水、正辛醇-水等)、不同操作条件(气泡:  $0.1 < Re < 10^4$ ,  $10^{-11} < Mo < 7$ ; 液滴:  $5 < Re < 2000$ ,  $10^{-11} < Mo < 10^{-6}$ )下测量的流粒  $C_D$  数据进行合理预测。另外, 结合新流粒  $C_D$  关联式和单流粒运动方程对流粒上升速度进行了预测, 预测结果与不同体系中的实验测量数据之间呈现出较好的一致性。

**关键词:** 曳力系数; 数学模型; 上升速度; 液滴; 气泡

中图分类号: TB126 文献标识码: A 文章编号: 1009-606X(2021)06-0649-09

## 1 前言

液-液萃取、气(液)-液反应等多相过程广泛应用于化工、制药、食品加工和废水处理等领域。在这些产业过程中, 为了提升产业产能和相关设备(如鼓泡塔、旋转萃取塔等)的性能, 工程师常常面临的挑战性工作是如何强化多相质量传递速率或效率。传质过程与相界面面积相关, 故增大相界面面积是提升传质速率的一种方式。因此, 流粒(液滴或气泡)形成的多相分散体系被广泛应用于规模化生产。多相分散体系中因流粒群运动过程复杂、各相流动瞬态变化且与反应、传递等过程高度耦合<sup>[1]</sup>, 故在规模化的生产过程中常面临萃取效率低、反应收率和选择性不理想等问题。单流粒是多相分散体系中的最小传质单元, 对于降低规模装置内群流粒体系的复杂性非常有利, 故研究者提出了“Bottom-Up Design”的研究思路<sup>[2,3]</sup>, 开展了大量与单流粒相关的研究<sup>[3,4]</sup>。

准确预测或确定静止环境中单流粒的上升(或下降)的终端速度(Terminal Velocity) $u_t$ 对于两相分散流非常重要<sup>[5]</sup>。这是因为计算许多重要的无量纲准数[Pecllet 准数( $Pe$ )、Reynolds 准数( $Re$ )、Weber 准数( $We$ )等]或预测分散相速度、质量传递系数、相含率等参数均需要使用 $u_t$ 。研究者提出了许多用于估计 $u_t$ 的经验表达式, 但这些表达式是基于特定条件下的单流粒运动实验结果进行关

联而很难将其推广至其他不同体系。此外,  $u_t$ 可由单流粒运动方程求取。根据静止环境中单流粒在自由上升(或下降)过程中的受力平衡可得单流粒运动方程<sup>[3]</sup>。

$$\frac{du}{dt} = \frac{|\rho_c - \rho_d|}{\rho_d + C_{VM}\rho_c} g - \frac{3}{4} C_D \frac{\rho_c}{\rho_d + C_{VM}\rho_c} \frac{u^2}{d} \quad (1)$$

其中,  $u$ ,  $t$ ,  $d$ 分别为流粒的运动速度、时间、直径,  $\rho_c$ ,  $\rho_d$ 分别为连续相密度和分散相密度,  $g$ 为重力加速度,  $C_{VM}$ 为虚拟质量系数, 可近似取值为 0.785<sup>[6]</sup>,  $C_D$ 为曳力系数。

若  $C_D$  确定, 基于方程(1)可预测  $u_t$ 。因方程(1)具有普遍性, 故基于该方程预测的  $u_t$  不受实验体系的限制。但只有当  $Re \ll 1$  (如爬流)时才存在  $C_D$  的解析解, 比如当  $Re < 0.1$  时且满足 Stokes 定律, 则有  $C_D = 24/Re$ 。对于高  $Re$  情形, 因惯性力和边界层在流粒表面分离等的影响导致很难获得  $C_D$  的通用解析解, 故只能建立  $C_D$  的经验关联或进行数值求解。李孟等<sup>[7]</sup>的研究表明流粒  $C_D$  对反应器内湍能耗散速率、气含率分布及液相速度分布等存在较大影响。认识到曳力系数的重要性, 文献报道了一系列适用于估算不同  $Re$  区间内流粒  $C_D$  的关联式。Brauer<sup>[8]</sup>提出了用于估算  $Re > 2$  时气泡  $C_D$  的关联式。当  $Re \leq 100$  时, Chao<sup>[9]</sup>、Rivkind 等<sup>[10]</sup>及 Hamielec 等<sup>[11]</sup>分别建立了估计流粒  $C_D$  的表达式。Saboni 等<sup>[12]</sup>和 Feng 等<sup>[13]</sup>对流粒的曳力系数进行了研究, 提出了能够预测

$Re < 1000$  条件下  $C_D$  的关联式。Ceylan 等<sup>[14]</sup>通过分段拟合空气-水体系的实验数据提出了一个可预测  $Re \in [10, 10^4]$  范围内流粒  $C_D$  的经验表达式, 但该表达式在整个  $Re$  范围内存在不连续的问题。从上可知, 大多数用于估算流粒  $C_D$  的关联式是分段的且仅与  $Re$  相关。因流粒运动过程中会发生变形, Bozzano 等<sup>[15]</sup>和 Kelbaliyev 等<sup>[16]</sup>认为  $C_D$  不仅与  $Re$  数相关, 还应与 Morton 准数( $Mo$ )等相关, 基于实验数据他们分别提出了用于预测静止环境中流粒自由上升时  $C_D$  的经验关联式。Tomiyama 等<sup>[17]</sup>通过关联  $Re$  和 Eotvos 准数( $Eo$ )提出了估算  $C_D$  的计算式。近年来, Yan 等<sup>[18]</sup>提出了用于计算纯水中气泡曳力脉动的关联式; 周毓佳等<sup>[19]</sup>对已有气泡曳力系数模型进行了分区研究, 筛选出适用不同  $Re$  和  $We$  区间的曳力系数关

联式。表 1 汇总了一些文献报道的估算流粒  $C_D$  的关联式。此外, 随着计算机水平的快速发展, 直接数值求解曳力系数变成了可能, 如 Shao 等<sup>[20]</sup>利用满足质量守恒的水平集法对变形液滴的瞬态曳力系数进行了数值模拟研究。文献中实验测量的  $C_D$  通常与  $Re$  进行关联, 这导致无法获取确切的流粒直径和终端速度来计算  $Eo$ , 图 1 将表 1 中部分  $C_D$  模型的预测值和实验测量结果进行了对比。由图可知, 分段关联式很难对较大  $Re$  范围内的  $C_D$  进行准确预测, 且对不同研究者测量结果的预测能力较差。另外, Kelbaliyev 等<sup>[16]</sup>提出的关联式虽能在大范围内预测  $C_D$  与  $Re$  之间的演变趋势, 但在整个  $Re$  区间内似乎低估了  $C_D$ 。因此, 本工作尝试建立适用范围更广的流粒  $C_D$  关联式。

表 1 用于估算纯体系中流粒  $C_D$  的不同经验关联式  
Table 1 Correlation models for estimating  $C_D$  in pure systems

Authors	Drag coefficient models	Note
Yan et al. <sup>[18]</sup>	$C_D = \max\{\min[24Re^{-1}(1 + 0.15Re^{0.687}), 72Re^{-1}], 24Re^{-1}(1 + 0.15Re^{0.687}) \cdot 12.6^{-1} Re^{0.55} Eo^{0.95} We^{-1.10}\}$	Bubble
Tomiyama et al. <sup>[17]</sup>	$C_D = \max\{\min[24Re^{-1}(1 + 0.15Re^{0.687}), 48Re^{-1}], 8Eo[3(Eo + 4)]^{-1}\}$	Bubble
Kelbaliyev et al. <sup>[16]</sup>	$C_D = 16Re^{-1}[1 + (Re/1.385)^{12}]^{1/55} + 8Re^{4/3} Mo^{1/3} [3[24(1 + Mo^{1/3}) + Re^{4/3} Mo^{1/3}]]^{-1}$	$Re \leq 100, Mo \leq 7,$ bubble
Brauer <sup>[8]</sup>	$C_D = 16Re^{-1} + 14.9Re^{-0.78} (1 + 10Re^{-0.6})^{-1}$	$Re > 2,$ bubble
Feng et al. <sup>[13]</sup>	$C_D = 24(2 - \mu^*)Re^{-1} (1 + 2.21Re^{-1/2} - 2.14Re^{-1}) + 4\mu^* (6 + \mu^*)^{-1} \cdot 17.0Re^{-2/3}$ $C_D = 4(\mu^* + 2)^{-1} \cdot 17.0Re^{-2/3} + (\mu^* - 2)(\mu^* + 2)^{-1} \cdot 24Re^{-1} \cdot (1 + Re^{2/3}/6)$	$5 \leq Re \leq 1000,$ $0 \leq \mu^* \leq 2$ $5 \leq Re \leq 1000,$ $2 \leq \mu^* \leq \infty$
Chao <sup>[9]</sup>	$C_D = 32Re^{-1} [1 + 2\mu^* - 0.314(1 + 4\mu^*)Re^{-0.5}]$	$10 \leq Re \leq 100,$ bubble
Saboni et al. <sup>[12]</sup>	$C_D = \{[\mu^* (24Re^{-1} + 4Re^{-1/3}) + 14.9Re^{-0.78}]Re^2 + 40(2 + 3\mu^*)Re^{-1} + 15\mu^* + 10\} [(1 + \mu^*)(5 + Re^2)]^{-1}$	$Re \leq 400,$ $0.01 \leq \mu^* \leq 1$
Hamielec et al. <sup>[11]</sup>	$C_D = 3.05(783\mu^{*2} + 2142\mu^* + 1080)[(60 + 29\mu^*)(4 + 3\mu^*)Re^{0.74}]^{-1}$	$4 \leq Re \leq 100$
Rivkind et al. <sup>[10]</sup>	$C_D = (1 + \mu^*)^{-1} [\mu^* (24Re^{-1} + 4Re^{-1/3}) + 14.9Re^{-0.78}]$	$10 \leq Re \leq 100$

Note:  $\mu^* = \mu_d/\mu_c$ ,  $\mu_c$  and  $\mu_d$  denote the continuous and dispersed phase viscosity respectively.

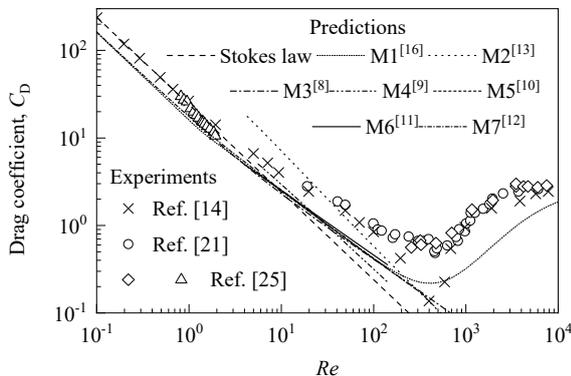


图 1 不同  $C_D$  关联式的预测结果与实验数据的对比

Fig.1 Comparisons of the predictions of different correlations of  $C_D$  and the measurements of experiments

综上, 现有  $C_D$  关联式大多是分段的, 且很难在较大范围对  $C_D$  给出较为准确的预测。另外, 气泡和液滴的物性参数差别较大, 相同操作条件下气泡和液滴在运动过程中的变形程度也不同, 故基于气泡实验数据建立的  $C_D$  关联式难以应用于液滴情形, 反之亦然。从表 1 可知大部分  $C_D$  关联式是基于气泡数据进行关联的。本工作旨在提出一个能够合理关联液滴和气泡  $C_D$  的通用数学形式, 利用现有实验结果发展一个适用范围更广且关联  $Re$  和  $Mo$  的新曳力系数估算式, 并结合新  $C_D$  关联式和方程(1)实现对流粒终端速度的合理预测。

## 2 曳力系数模型发展

实验结果表明, 对于不同  $Re$  区间, 流粒  $C_D$  与  $Re$  之间通常存在三种变化趋势<sup>[14,21]</sup>。当  $Re$  较小时, 流粒

通常能维持球形,  $C_D$  可表示为  $Re$  的唯一函数且随  $Re$  增加而减小; 而对于中等大小  $Re$ , 流粒会发生变形, 且  $C_D$  随  $Re$  增大而显著增大;  $Re$  足够大时,  $C_D$  趋近于定值。从实验结果可知, 因中低  $Re$  条件下流粒变形程度小, 可基于  $Re$  的单一函数形式估算该条件下的  $C_D$ ; 对于中高  $Re$  条件, 流粒变形会显著影响  $C_D$ , 故需引入表征流粒变形的准数(如  $Mo$  或  $EO$ )才可能准确关联  $C_D$ 。基于上述分析, 因中低  $Re$  条件下的流粒  $C_D$  可近似表示成  $Re$  唯一函数形式, 故采用由  $Re \cdot \exp(-Re)$  型数学因子构成的多项式来估算该条件下的流粒  $C_D$  值。Bozzano 等<sup>[15]</sup>和 Kelbaliyev 等<sup>[16]</sup>认为中高  $Re$  条件下  $C_D$  与  $Re$  之间的演变规律可使用关于  $Re$  和  $Mo$  准数的函数来描述。基于他们的研究结果, 本工作用  $Re^{4/3}Mo^{1/3}/[b(1+Mo^{1/3})+Re^{4/3}Mo^{1/3}]$  型函数形式来估计中高  $Re$  条件下的  $C_D$  值, 其中  $b$  为待定参数。综上, 本工作提出如下估算流粒  $C_D$  的连续函数形式。

$$C_D = a_1 + a_2 Re^{-2/3} \exp(a_3 Re^{-1/8}) + a_4 Re^{1/3} \exp(-a_5 Re^{1/3}) + a_6 Re^{-5/2} \exp(-a_7 Re^{-1/2}) + a_8 \frac{Re^{4/3} Mo^{1/3}}{a_9 (1 + Mo^{1/3}) + Re^{4/3} Mo^{1/3}} \quad (2)$$

其中,  $a_1 \sim a_9$  为模型参数, 由实验数据确定;  $Re = \rho_c d u / \mu_c$ ,  $Mo = g \mu_c^4 / [\rho_c - \rho_d] (\sigma^3 \rho_c^2)$ ,  $\sigma$  为表面张力。

气泡和液滴间的物性参数(如密度、黏度和表面张力等)存在较大差异, 即使在相同的操作条件下, 气泡和液滴的变形程度也不同, 因此很难用同一组参数实现对气泡和液滴  $C_D$  的准确估计。因此, 基于方程(2), 分别提出适用于估算气泡和液滴  $C_D$  的关联式, 即通过气-液体系和液-液体系中测量的  $C_D$  的实验数据来确定方程(2)中的模型参数。值得一提的是, 当  $Re < 1$  时, 实验发现气-液体系中的  $C_D$  存在一种有趣的现象。即当连续相

黏度  $\mu_c$  较低和较高时(如空气-水体系  $\mu_c \approx 1.0 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ , 空气-甘油体系  $\mu_c \approx 700 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ ), 在低  $Re$  条件下实验测量的气泡  $C_D$  值逼近 Stokes 理论预测的结果<sup>[21,22]</sup>(即  $C_D = 24/Re$ ); 而对于中等  $\mu_c$  条件(如  $460 \text{ mPa}\cdot\text{s} > \mu_c > 10 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ ), 低  $Re$  条件下实验测量的气泡  $C_D$  值逼近将气体视为无黏流体时的理论预测结果<sup>[22]</sup>(即  $C_D = 16/Re$ )。对于  $\mu_c$  过渡区域内(如  $\mu_c \in [1 \text{ mPa}\cdot\text{s}, 10 \text{ mPa}\cdot\text{s}]$  或  $[460 \text{ mPa}\cdot\text{s}, 700 \text{ mPa}\cdot\text{s}]$ )气-液体系中  $C_D$  与  $\mu_c$  的变化规律鲜有报道, 因此无法清晰地了解这种转变行为。因缺乏足够多的数据而很难预测低  $Re$  条件下  $\mu_c$  变化时实验观测到的气泡  $C_D$  数值的转变行为, 将分别基于两种条件下的实验结果关联出两组估计气泡  $C_D$  的模型参数。

Garner 等<sup>[21]</sup>利用直径为 10 和 2 cm 的鼓泡塔装置, 在实验温度范围为  $14 \sim 18 \text{ }^\circ\text{C}$  条件下对纯净的空气-水体系中尺寸区间为  $[0.0126 \text{ cm}, 0.675 \text{ cm}]$  的气泡  $C_D$  值进行了测定。Raymond 等<sup>[22]</sup>在实验温度为  $19.7 \pm 1.5 \text{ }^\circ\text{C}$  时将不同比例的水与甘油混合来实现  $\mu_c$  的调控, 并对尺寸区间为  $[1.0 \text{ mm}, 13 \text{ mm}]$  的气泡的曳力系数进行了测量, 获得了不同  $\mu_c$  条件下单气泡的  $C_D$  值。Wegener 等<sup>[23]</sup>在实验温度为  $25 \text{ }^\circ\text{C}$  时对尺寸区间为  $[1.0 \text{ mm}, 7.0 \text{ mm}]$  的单个甲苯液滴在水中的自由上升过程进行了研究, 获得了液滴自由上升过程中的  $C_D$  数据。在液-液体系中尚未见高  $Re$  条件下液滴  $C_D$  的测量数据报道。但气泡的测量结果表明当  $Re$  足够大时,  $C_D$  趋近于一个定值(约  $2.6^{[14,21]}$ )。另外, 实验结果表明在高  $Re$  区域时刚性球  $C_D$  趋近于常数  $4/9$ , 且 Harmathy<sup>[24]</sup>的理论结果认为在高  $Re$  区域时, 流粒  $C_D$  与刚性球  $C_D$  之间存在 6 倍关系, 即高  $Re$  条件下流粒  $C_D$  趋近于常数  $8/3$ 。因此, 尽管未有相应实验数据报道, 结合现有实验数据和理论结果可认为液滴  $C_D$  在高  $Re$  条件下也将趋近于定值。

表 2 方程(2)中参数的估计值

Table 2 Estimated value of parameters in Eq. (2)

	Parameter									Note
	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	
Bubble	-0.758	2.79	2.19	1.29	0.40	$1.93 \times 10^{-7}$	$3.53 \times 10^{-3}$	3.93	4.52	$\mu_c < 10 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ or $\mu_c > 700 \text{ mPa}\cdot\text{s}$
	0.147	1.81	2.21	3.11	5.49	$4.28 \times 10^{-7}$	$-4.22 \times 10^{-4}$	2.51	20.53	$460 \text{ mPa}\cdot\text{s} > \mu_c > 10 \text{ mPa}\cdot\text{s}$
Droplet	-0.279	9.58	1.19	1.81	5.94	$3.12 \times 10^{-6}$	$-2.21 \times 10^{-3}$	2.99	16.29	

根据以上分析, 利用编写的求解多维无约束线性优化问题的计算机程序并结合上述实验测量的  $C_D$  数据对方程(2)中模型参数进行了估值, 相应的估值结果见表 2。图 2(a)~2(c)中显示了关联式的拟合结果。从图可看出, 提出的流粒  $C_D$  关联式能够体现上述分析的特征。另外, 85%以上的关联曲线预测值与实验点的偏差在  $\pm 25\%$  以

内[图 2(d)], 说明方程(2)的函数形式能够较好地描述不同体系的流粒  $C_D$  数据, 具有较好地通用性。下面将利用不同研究者获取的流粒  $C_D$  数据及终端速度来进一步验证与测试所提关联式的预测能力。

### 3 结果与讨论

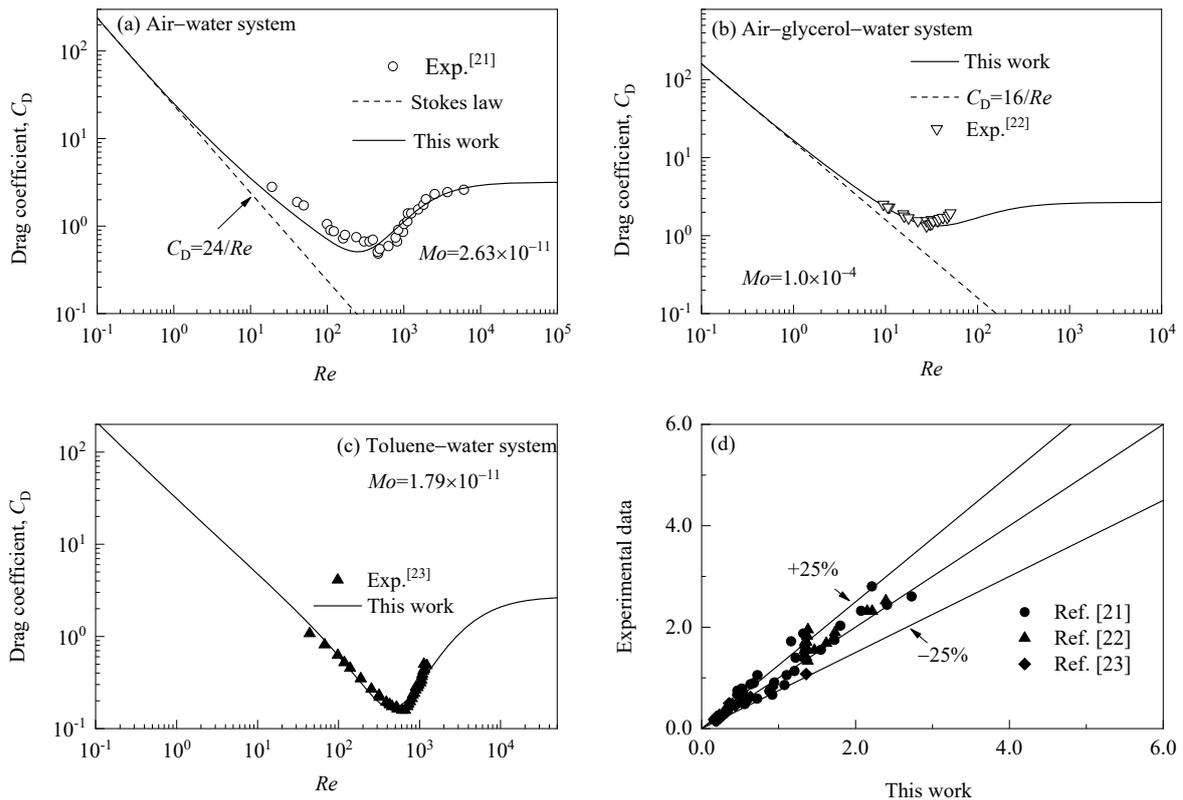


图 2 基于提出的  $C_D$  关联式[方程(2)]的拟合结果与实验数据的对比

Fig.2 Comparisons of fitting results based on the proposed  $C_D$  correlation [Eq. (2)] and experimental data

利用文献报道的  $C_D$  和终端速度的实验测量结果对基于单组实验数据关联的流粒  $C_D$  表达式进行了验证。

### 3.1 曳力系数 $C_D$

Talaia<sup>[25]</sup>对空气-水体系中气泡上升过程进行了实验观测(实验温度 20℃, 气泡尺寸区间为[0.1 cm, 2.2 cm]), 获得了  $Re > 200$  条件下的气泡  $C_D$  值。其结果表明气泡  $C_D$  先随  $Re$  增大而增大, 最后当  $Re > 2000$  后趋近于常数。Raymond 等<sup>[22]</sup>测量了  $Re < 3$  时不同黏度的空气-甘油体系中的气泡  $C_D$  值, Talaia<sup>[25]</sup>也在实验温度为 20℃, 气泡尺寸范围为[1.8 cm, 4.0 cm]的条件下对甘油-空气体系中的气泡  $C_D$  值进行了测量。Ceylan 等<sup>[14]</sup>收集了不同研究者对于可变形颗粒  $C_D$  值的实验测量结果, 实验结果表明当  $Re < 1$  时, 气泡  $C_D$  值满足 Stokes 定律 ( $C_D = 24/Re$ ), 且当  $Re < 200$  时,  $C_D$  随  $Re$  增大而减小; 随着  $Re$  进一步增大, 因颗粒发生变形导致  $C_D$  随  $Re$  增大而增加, 且当  $Re$  足够大( $\approx 3000$ )时  $C_D$  趋于定值。Garner 等<sup>[21]</sup>报道了空气-水体系中  $C_D$  的测量结果。所提关联式的预测值与实验结果的对比见图 3(a)。尽管空气-水体系的  $Mo$  值与甘油-水体系不同, 但当  $Re$  值较小时,  $C_D$  值基本上与  $Mo$  数无关, 故图 3(a)中将 Raymond 等<sup>[22]</sup>和 Talaia<sup>[25]</sup>测量的  $Re < 3$  的实验数据与预测结果进行了对比。从图可看出, 当  $Re$  在[0.1,  $10^4$ ]区间内变化时, 新关

联式的预测结果能较好地吻合实验结果, 90%以上的关联曲线预测值与实验点的偏差在 $\pm 20\%$ 以内。但对于 Ceylan 等<sup>[14]</sup>搜集的实验数据, 当  $Re \in [200, 700]$ 时, 预测结果在一定程度上高估了实验值。因该  $Re$  区间对应流粒变形的区间, 即使是在相同的操作条件下, 不同研究者在进行实验时流粒的变形程度可能不同。在此  $Re$  区间,  $C_D$  值的测量难度较大, 测量结果可能存在较大偏差, 如 Ceylan 等<sup>[14]</sup>的实验数据与 Talaia<sup>[25]</sup>及 Garner 等<sup>[21]</sup>的测量结果偏差较大。在流粒变形区域的统计学测量可能能够减小或消除由流粒变形而导致不同研究者测量的  $C_D$  数据的差异性。因此, 为了能够更准确的预测  $C_D$  值, 可能需要更多来自流粒变形区间且满足统计学要求的实验数据。此外, 当  $Re < 1$  时, 曲线的预测结果基本与 Stokes 定律一致; 而当  $Re \in [2, 10]$ 时,  $C_D \propto Re^{-0.78}$ 。这些结论与 Clift 等<sup>[26]</sup>的研究结果一致。

Raymond 等<sup>[22]</sup>系统研究了气泡在由不同比例甘油和水形成的混合物中的自由上升过程, 获得了不同  $Mo$  下的气泡  $C_D$  值。他们发现当  $Mo \leq 0.023$  时,  $C_D-Re$  曲线呈现类似于空气-水体系的演变规律, 且  $C_D$  的最小值随  $Mo$  变化而变化。特别地, 他们还发现当  $Mo = 7$  且  $Re < 2$  时, 测量结果满足 Stokes 定律; 当  $Mo < 1.4$  且  $Re < 2$  时,  $C_D = 16/Re$ ; 而对于稍大的  $Re$  条件,  $C_D = 14.9/Re^{0.78}$ 。

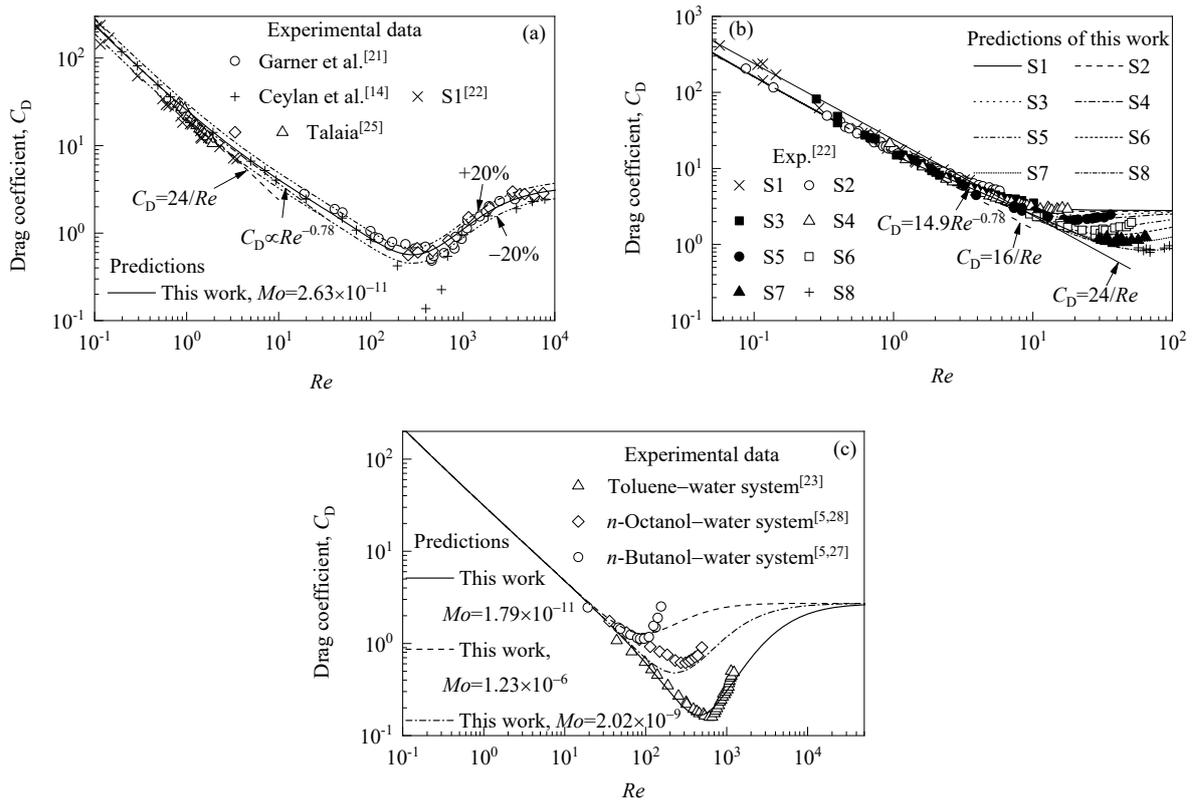


图 3 不同体系中实验测得的  $C_D$  数据与所提关联式预测结果的对比

Fig.3 Comparisons of the predictions of the proposed  $C_D$  correlation model and experimental results (S1:  $Mo=7$ ; S2:  $Mo=1.4$ ; S3:  $Mo=0.11$ ; S4:  $Mo=0.023$ ; S5:  $Mo=9 \times 10^{-4}$ ; S6:  $Mo=1 \times 10^{-4}$ ; S7:  $Mo=1.1 \times 10^{-5}$ ; S8:  $Mo=9 \times 10^{-7}$ )

不同  $Mo$  数下  $C_D$  的测量结果与新关联式预测值的对比见图 3(b)。整体上, 所提关联式能较好地预测不同  $Mo$  数下测量的实验数据, 预测结果与实验结果最大偏差为 20%, 且大多数偏差在  $\pm 10\%$  以内。

Bertakis 等<sup>[27]</sup>、Paul 等<sup>[28]</sup>及 Wegener 等<sup>[23]</sup>分别对正丁醇、正辛醇和甲苯液滴在水中的自由上升过程进行了研究, 并获得了三种不同液滴在水中自由上升过程中的  $C_D$  值<sup>[5]</sup>。这些测量数据被用来进一步测试  $C_D$  关联式[图 3(c)]。大体上, 正辛醇-水体系中超 80% 的数据点的预测结果的偏差在  $\pm 25\%$  以内; 对于正丁醇-水体系, 当  $Re < 100$  时, 预测结果与实验结果吻合较好且偏差在  $\pm 10\%$  以内, 而当  $Re > 100$  时, 模型预测结果与实验结果存在明显偏差。尽管预测值与测量结果存在一定偏差, 但整体上, 关联式能够准确预测  $C_D$  与  $Re$  之间的演变趋势, 特别是液滴发生变形的位点。在 Wegener 等<sup>[23]</sup>的实验体系中  $Re$  的大致范围为 [40, 1200]。基于实验<sup>[14,21]</sup>和理论<sup>[24]</sup>结果, 可认为当  $Re$  大于某一数值时, 液滴的  $C_D$  值也会趋于定值。但现有用于确定液滴曳力模型参数的实验数据缺乏准确表征液滴  $C_D$  值趋于定值时的临界  $Re$  值, 故在拟合液滴曳力系数模型参数时可能会存在一定

的误差。其次,  $Re < 40$  的液滴曳力系数测量值的缺乏也可能会引起误差。图 3(c)中实验值与预测值出现偏差的可能原因之一是低  $Re$ (如  $Re < 40$ )和高  $Re$ (如  $Re > 2000$ )条件下实验数据的缺乏所致。另外, 关联液滴曳力模型参数的实验数据是在  $Mo \approx 1.79 \times 10^{-11}$  的条件下测量的, 而正丁醇-水体系中的  $Mo$  值则高达  $1.23 \times 10^{-6}$ , 二者相差 5 个数量级。一般地, 对于液-液体系,  $Mo$  数越大意味着体系的界面张力越小, 故高  $Mo$  条件下液滴的变形程度越大。高度变形液滴的形状非常复杂, 仅利用  $Re$  和  $Mo$  两个无量纲参数可能不足以准确描述高度变形的液滴。因此,  $Mo$  数值的显著差异可能是导致预测结果与实验结果出现较大偏差的原因之二。尽管存在偏差, 但 3.2 节中关于液滴终端速度的预测值与实验值的对比仍能说明在测试范围内该关联式具有较高的精度。

### 3.2 流粒终端速度 $u_t$

准确预测自由上升过程中的流粒终端速度  $u_t$  对于气(液)-液两相分散体系十分重要。结合  $C_D$  关联式与方程(1)可预测  $u_t$ 。利用文献中实验测量的液滴和气泡终端速度数据可进一步验证所提出的  $C_D$  关联式。

Garner 等<sup>[21]</sup>通过实验获取了不同气体(如空气、乙

烯、二氧化碳等)在水中自由上升时的  $u_t$  值。Ceylan 等<sup>[14]</sup>搜集了不同研究者在自由流中测量的气泡  $u_t$  值。这些实验数据表明,当气泡直径  $d < 10$  mm 时,  $u_t$  先随气泡尺寸增大而增加,随后进入一个平台区( $u_t \approx 20$  cm/s);而当  $d > 10$  mm 时,  $u_t$  将随  $d$  增大而显著增加。根据气泡自由上升实验, Raymond 等<sup>[22]</sup>研究了  $Mo$  数对气泡终端速度的影响,并获取了不同  $Mo$  数、不同气泡尺寸下的  $u_t$  值。他们的实验结果表明在高  $Mo$  条件下,  $u_t$  近似服从 Stokes 定律(即  $u_t \propto d^2$ ),而对于低  $Mo$  条件,  $u_t$  随气泡尺寸的变化而变化。图 4 为这些实验数据与预测结果的对比。从图可知,模拟结果不仅能够准确捕捉上述实验

观测特征,而且能在定量上较好的吻合实验数据。图 4 中绝大多数实验值与预测值的偏差在  $\pm 20\%$  以内,特别地,图 4(c)中的预测结果与实验值的偏差不超过  $\pm 10\%$ 。另外, Ceylan 等<sup>[14]</sup>搜集的数据表明当  $d \in [0.08$  cm, 0.16 cm] 区间时可能存在一个  $u_t$  凸峰。但新  $C_D$  关联式虽然在该区域预测出了一个不太明显的凸峰,但明显低估了实验峰值,主要原因可能是所提关联式在一定程度上略微高估了气泡变形区域的  $C_D$  值。整体而言,对于图 4 中的条件,提出的气泡  $C_D$  关联式表现出较好的预测  $u_t$  的能力。

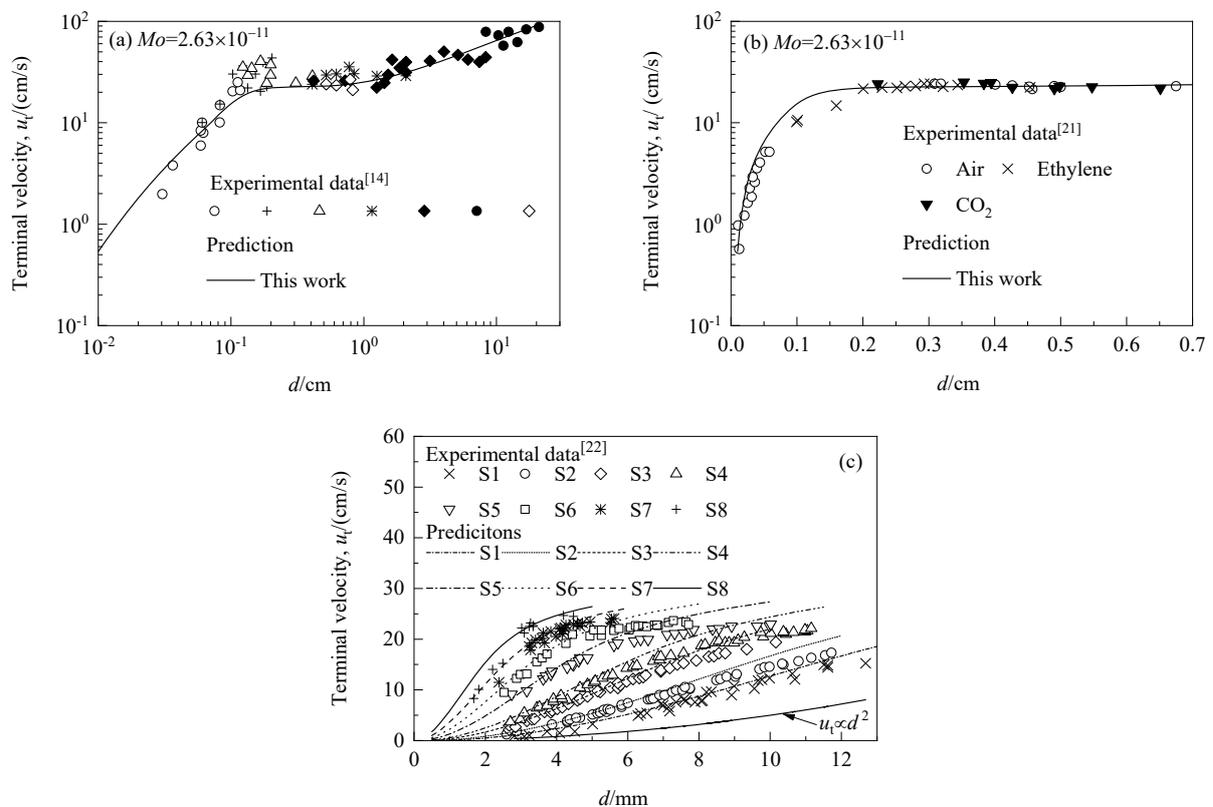


图 4 不同实验体系中的气泡终端速度  $u_t$  的预测值与实验数据的对比

Fig.4 Comparison of  $u_t$  predicted by the proposed  $C_D$  correlation model and experimental results

(S1:  $Mo=7$ ; S2:  $Mo=1.4$ ; S3:  $Mo=0.11$ ; S4:  $Mo=0.023$ ; S5:  $Mo=9 \times 10^{-4}$ ; S6:  $Mo=1 \times 10^{-4}$ ; S7:  $Mo=1.1 \times 10^{-5}$ ; S8:  $Mo=9 \times 10^{-7}$ )

Bertakis 等<sup>[27]</sup>、Bäumler 等<sup>[29]</sup>及 Wegener 等<sup>[23]</sup>分别测量了正丁醇(实验温度  $20^\circ\text{C}$ , 液滴尺寸区间为  $[1.0$  mm,  $3.5$  mm])、乙酸丁酯(实验温度  $25^\circ\text{C}$ , 液滴尺寸区间为  $[1.0$  mm,  $4.5$  mm])和甲苯(实验温度  $25^\circ\text{C}$ , 液滴尺寸区间为  $[1.0$  mm,  $7.0$  mm])液滴在水中自由上升的  $u_t$  值。Kamp 等<sup>[3]</sup>通过实验记录了  $25^\circ\text{C}$  时直径为  $1.5$  和  $2.9$  mm 的甲苯液滴在水中的瞬态上升速度。Komrakova 等<sup>[30]</sup>运用 LBM 方法对正丁醇液滴在水中的自由上升过程进行

了三维数值模拟,获取了模拟温度为  $20^\circ\text{C}$  且正丁醇液滴尺寸区间为  $[1.0$  mm,  $4.0$  mm] 时的  $u_t$  值。图 5 为这些单液滴实验或数值模拟结果与所提液滴新  $C_D$  关联式的预测结果的对比。尽管图 3(c)中显示新关联式对于正丁醇液滴  $C_D$  值的预测与实验测量结果存在一定偏差,但图 5(a)和 5(b)表明基于所提关联式预测的正丁醇液滴的  $u_t$  值仍能与实验数据和数值模拟结果呈现较好地一致性,偏差在  $\pm 10\%$  以内。另外,模型预测的乙酸丁酯液滴

的  $u_t$  值能较好的吻合实验值。这表明图 3(c) 中的预测偏差在可接受范围, 且在定性上表明液滴  $C_D$  与  $Re$  的演变规律具有合理性。对于甲苯-水体系, 本工作的预测结果与 Wegener 等<sup>[23]</sup> 的实验结果吻合较好[图 5(a)]; 由于 Kamp 等<sup>[3]</sup> 的实验体系可能存在污染物, 预测结果略微高估了实验测量的液滴瞬态上升速度[图 5(c)], 最大高

估偏差为 10%。以上结果表明, 本工作所提关联式能在定性上较准确的描述液滴  $C_D$  值的演变趋势并能据此合理的预测  $u_t$ , 但仍需相应实验数据特别是高  $Re$  条件下的液滴  $C_D$  数据来进一步提升关联式的精度和适用范围。

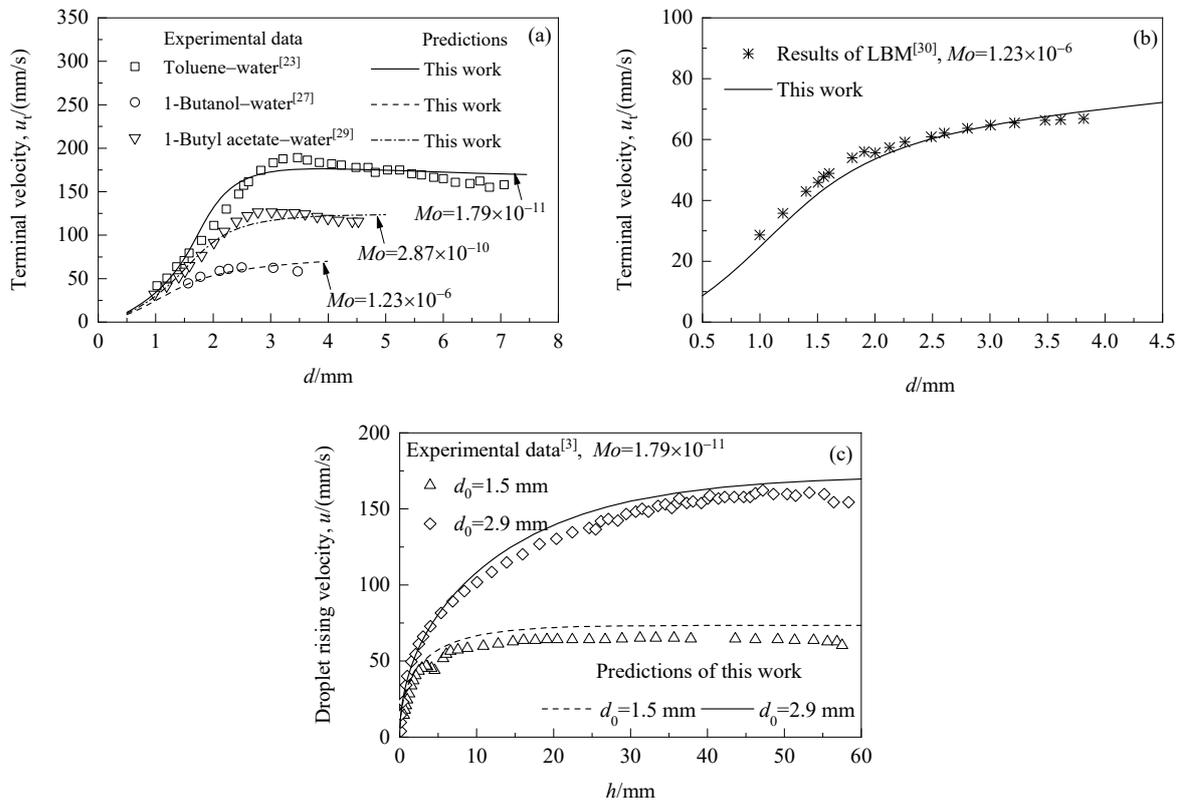


图 5 不同实验体系中的液滴的终端速度  $u_t$ 、上升速度  $u$  的预测值与实验数据的对比

Fig.5 Comparisons of  $u_t$  and  $u$  predicted by the proposed  $C_D$  correlation model and experimental results

## 4 结论

基于已有室温条件下测量的实验数据和理论研究结果, 对宽  $Re$  范围内流粒  $C_D$  与  $Re$  之间的演变规律进行了分析, 提出了一个能够在整个  $Re$  范围内描述流粒  $C_D$  变化规律的通用数学关系式, 利用单组实验数据和编写的求解多维无约束线性优化问题的计算机程序确定了模型参数, 并运用不同研究者、不同操作条件下通过实验测量的流粒曳力系数和终端速度对所提模型的预测能力和合理性进行了验证与分析。将新流粒  $C_D$  关联式的预测结果同实验数据或三维数值模拟结果进行了对比, 得到如下结论:

(1) 对比现有流粒  $C_D$  模型和实验结果可发现, 文献中用于估算流粒  $C_D$  的模型大多是分段的且只在低雷诺数区间内有效, 难以同时准确预测不同研究者、不同体

系的实验结果。另外, 大部分现有流粒  $C_D$  模型是基于气泡实验数据关联的, 因液滴和气泡的物性参数差别较大, 基于气泡实验数据建立的  $C_D$  关联式难以应用于液滴情形。

(2) 提出的新  $C_D$  关联式是  $Re$  和  $Mo$  的函数, 能对室温条件下由不同研究者在不同实验体系(如空气-水、空气-甘油-水、空气-甘油、甲苯-水、正丁醇-水、正辛醇-水等)、不同条件下(气泡:  $0.1 < Re < 10^4$ ,  $10^{-11} < Mo < 7$ ; 液滴:  $5 < Re < 2000$ ,  $10^{-11} < Mo < 10^{-6}$ )测量的流粒  $C_D$  数据进行合理预测。这表明所提出的新  $C_D$  关联式具有合理性和通用性。

(3) 结合所提出的  $C_D$  关联式和单流粒运动过程中的力平衡方程对不同实验体系下的流粒终端速度、瞬态上升速度进行了理论预测。对于不同测试条件, 预测的流粒终端速度、瞬态上升速度能够与实验或三维数值模

拟结果相吻合, 这进一步验证了新  $C_D$  关联式的可靠性。

(4) 提出的流粒  $C_D$  关联式在所选操作条件范围呈现出较好的预测能力, 但因流粒变形区域及高  $Re$  条件下液滴  $C_D$  数据的缺乏以及实验数据的测量温度为室温, 仍可能使得所提关联式在具体应用时出现偏差。开展较大温度区间的相关实验测量特别是与液滴  $C_D$  相关的实验测量工作将有助于提升流粒  $C_D$  关联式的适用范围与预测能力。

## 参考文献

- [1] 杨超, 杨柳, 李向阳, 等. 多相氧化组合反应器与耦合分离新技术的研究构想与前景展望 [J]. 工程科学与技术, 2018, 50(2): 13–23.  
Yang C, Yang L, Li X Y, et al. Research plan and respect of new technology of multiphase oxidation with combined reactors and coupling separation [J]. Advanced Engineering Science, 2018, 50(2): 13–23.
- [2] Zhang J Y, Wang Y D, Stevens G W, et al. A state-of-the-art review on single drop study in liquid–liquid extraction: experiments and simulations [J]. Chinese Journal of Chemical Engineering, 2019, 27(12): 2857–2875.
- [3] Kamp J, Kraume M. From single drop coalescence to droplet swarms—scale-up considering the influence of collision velocity and drop size on coalescence probability [J]. Chemical Engineering Science, 2016, 156(1): 162–177.
- [4] 李严凯, 王凯, 骆广生. 液液微分散及其用于标准颗粒制备的研究进展 [J]. 化工进展, 2019, 38(1): 30–44.  
Li Y K, Wang K, Luo G S. Advances in liquid–liquid microdispersion and its applications in standard particle preparation [J]. Chemical Industry and Engineering Progress, 2019, 38(1): 30–44.
- [5] Wegener M, Paul N, Kraume M. Fluid dynamics and mass transfer at single droplets in liquid/liquid systems [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2014, 71(1): 475–495.
- [6] Kamp A, Chesters A, Colin C, et al. Bubble coalescence in turbulent flows: a mechanistic model for turbulence-induced coalescence applied to microgravity bubbly pipe flow [J]. International Journal of Multiphase Flow, 2001, 27(1): 1363–1396.
- [7] 李孟, 李向阳, 王宏智, 等. 鼓泡塔气液两相流不同曳力模型的数值模拟 [J]. 过程工程学报, 2015, 15(2): 181–189.  
Li M, Li X Y, Wang H Z, et al. Numerical simulation of gas–liquid two-phase flow in a bubble column with various drag models [J]. The Chinese Journal of Process Engineering, 2015, 15(2): 181–189.
- [8] Brauer H. Particle/fluid transport process [M]//Fortschritte der Verfahrenstechnik, Bd. 17., Dusseldorf: VDI-Verlag, 1979: 61–99.
- [9] Chao B T. Motion of spherical gas bubbles in a viscous liquid at large Reynolds numbers [J]. Physics of Fluids, 1962, 5(1): 69–79.
- [10] Rivkind V Y, Ryskin G M. Flow structure in motion of a spherical drop in a fluid medium at intermediate Reynolds numbers [J]. Fluid Dynamics, 1976, 11(1): 5–12.
- [11] Hamielec A E, Storey S H, Whitehead J M. Viscous flow around fluid spheres at intermediate Reynolds-numbers [J]. The Canadian Journal of Chemical Engineering, 1963, 12(1): 246–251.
- [12] Saboni A, Alexandrova S. Numerical study of the drag on a fluid sphere [J]. AIChE Journal, 2002, 48(12): 2992–2994.
- [13] Feng Z G, Michaelides E E. Drag coefficients of viscous spheres at intermediate and high Reynolds numbers [J]. Journal of Fluids Engineering, 2001, 123(1): 841–849.
- [14] Ceylan K, Altunbas A, Kelbaliyev G. A new model for estimation of drag force in the flow of Newtonian fluids around rigid or deformable particles [J]. Powder Technology, 2001, 119(1): 250–256.
- [15] Bozzano G, Dente M. Shape and velocity of single bubble motion: a novel approach [J]. Computer & Chemical Engineering, 2001, 25(1): 571–576.
- [16] Kelbaliyev G, Ceylan K. Development of new empirical equations for estimation of drag coefficient, shape deformation, and rising velocity of gas bubbles or liquid drops [J]. Chemical Engineering Communications, 2007, 194(1): 1623–1637.
- [17] Tomiyama A, Kataoka I, Zun I, et al. Drag coefficients of single bubbles under normal and micro gravity conditions [J]. JSME International Journal Series B, 1998, 41(2): 472–479.
- [18] Yan X K, Jia Y, Wang L J, et al. Drag coefficient fluctuation prediction of a single bubble rising in water [J]. Chemical Engineering Journal, 2017, 316(1): 553–562.
- [19] 周毓佳, 赵陈儒, 博涵亮. 气泡曳力系数模型分区研究 [J]. 化工学报, 2019, 70(S2): 108–116.  
Zhou Y J, Zhao C R, Bo H L. Partitioned investigation of drag coefficient models of bubbles [J]. CIESC Journal, 2019, 70(S2): 108–116.
- [20] Shao C X, Luo K, Fan J R. Detailed numerical simulation of unsteady drag coefficient of deformable droplet [J]. Chemical Engineering Journal, 2017, 308(1): 619–631.
- [21] Garner F H, Hammerton D. Circulation inside gas bubbles [J]. Chemical Engineering Science, 1954, 3(1): 1–11.
- [22] Raymond F, Rosant J M. A numerical and experimental study of the terminal velocity and shape of bubbles in viscous liquids [J]. Chemical Engineering Science, 2000, 55(1): 943–955.
- [23] Wegener M, Kraume M, Paschedag A R. Terminal and transient drop rise velocity of single toluene droplets in water [J]. AIChE Journal, 2010, 56(1): 2–10.
- [24] Harmathy T Z. Velocity of large drops and bubbles in media of infinite or restricted extent [J]. AIChE Journal, 1960, 6(2): 281–288.
- [25] Talaia M A R. Terminal velocity of a bubble rise in liquid column [J]. World Academy of Science, Engineering and Technology, 2007, 28(1): 264–268.
- [26] Clift R, Grace J R, Weber M E. Bubbles, drops and particles [M]. New York: Academic Press, 1978: 89.
- [27] Bertakis E, Groß S, Grande J, et al. Validated simulation of droplet sedimentation with finite–element and level-set methods [J]. Chemical Engineering Science, 2010, 65(6): 2037–2051.
- [28] Paul N, Kraume M. Influence of non-ionic surfactants on liquid–liquid mass transfer of single droplets [J]. Czasopismo Techniczne Mechanika, 2012, 109(1): 185–194.
- [29] Bäumler K, Wegener M, Paschedag A R, et al. Drop rise velocities and fluid dynamic behavior in standard test systems for liquid/liquid extraction experimental and numerical investigations [J]. Chemical Engineering Science, 2011, 66(3): 426–439.
- [30] Komrakova A E, Eskin D, Derksen J J. Lattice Boltzmann simulations of a single n-butanol drop rising in water [J]. Physics of Fluids, 2013, 25(1): 042102.